

---

# Sobre o cálculo do “value at risk” usando distribuições hiperbólicas: uma abordagem alternativa

---

Ailton Cassettari

Recebido em dezembro/2000

Nos últimos anos, sobretudo graças à rápida globalização dos mercados financeiros, tem-se observado crescente preocupação das instituições financeiras em estabelecer metodologias práticas e confiáveis, em medir os **riscos** a que seus portfólios estão submetidos. Ao mesmo tempo, os órgãos fiscalizadores começam a reconhecer a necessidade de regulamentação da área. Dentre os instrumentos de mensuração de riscos, a mais popular ferramenta rotineiramente utilizada é o **Value at Risk** (VaR), definido como a máxima perda esperada de um portfólio de ativos durante certo intervalo de tempo, sob dado nível de confiança (probabilidade).

Como é bem conhecido, muitas implementações do VaR assumem que os retornos dos ativos são normalmente distribuídos. A principal razão para isso é a simplicidade que se consegue nos cálculos. Entretanto, é notória a discrepância com os retornos observados no mercado real<sup>(1)</sup>. Por outro lado, qualquer mudança na distribuição utilizada acarreta complicações computacionais.

Várias foram as alternativas à distribuição normal propostas na literatura (Kon, 1984).

O objetivo neste trabalho é implementar uma metodologia de cálculo do VaR utilizando distribuições hiperbólicas, introduzidas recentemente em Finanças por Eberlein & Keller (1995; 1998), Eberlein, Keller & Prause (1998) e Barndorff-Nielsen & Prause (1999), entre outros, em vez de distribuições gaussianas (normais). Como já foi dito, o esforço computacional será consideravelmente maior se o desejo é a grande precisão. Aqui, o enfoque será na direção de uma estimativa preliminar do VaR, plausível, porém não rigorosamente justificada<sup>(2)</sup>. A razão para isso é que se quer avaliar a possibilidade de um uso efetivamente prático dessa implementação.

## O VALUE AT RISK

Essencialmente, dentro da comunidade financeira a metodologia padrão para medir o risco de uma variável aleatória  $X$  é o *Value at Risk* (VaR), ou seja, a perda potencial em um dado nível de probabilidade  $\alpha \in (0, 1)$ :

---

Ailton Cassettari, Doutor em Física pela Universidade de São Paulo, é Analista do Departamento de Pesquisa do Banco Sudameris-Brasil.  
E-mail: ailton.cassettarijr@sudameris.com.br

$$P[X < -VaR] = \alpha \quad [1]$$

Várias são as metodologias propostas para o cálculo do VaR. Dentre elas, serão citadas somente as mais difundidas: a do Comitê da Basileia (1996) e a do Banco J.P. Morgan (1996). No documento *RiskMetrics* (Banco J.P. Morgan, 1996), tabela 3.1, encontra-se uma comparação completa entre essas duas metodologias. Aqui apenas será enfatizada uma importante relação,

$$\sigma_{Basileia} = 4,45 \cdot \sigma_{RiskMetrics} \quad [2]$$

na qual,

$\sigma_{RiskMetrics}$  = volatilidades fornecidas pela metodologia *RiskMetrics*.

$\sigma_{Basileia}$  = volatilidades sugeridas pelo Comitê da Basileia para uso em **modelos internos**.

### O VaR paramétrico

Na definição de VaR fica claro que essa quantidade é um **percentil** (ou **quantil**) da distribuição de retornos do portfólio. Matematicamente, o *p*-ésimo percentil (denotado aqui por  $\beta$ ) de uma distribuição de retornos é definido como o valor que excede *p* por cento dos retornos. Em termos matemáticos, o  $\beta$  de uma distribuição (contínua) de probabilidade é dado por:

$$p = \int_{-\infty}^{\beta} f(r) dr \quad [3]$$

em que  $f(r)$  representa a função densidade de probabilidade. Geralmente, para medidas do VaR utilizam-se  $p = 0,01$  (1%) ou  $p = 0,05$  (5%).

A avaliação da integral [3] para a determinação de  $\beta$  deve ser feita numericamente. Para a distribuição gaussiana padrão (com média zero e variância unitária), muito utilizada, alguns valores são tabelados. Por exemplo, para  $p = 0,01$ ,  $\beta \cong -2,33$ ; para  $p = 0,05$ ,  $\beta \cong -1,64$ . No entanto, para outras distribuições tem-se de utilizar explicitamente algum método numérico.

### DISTRIBUIÇÕES HIPERBÓLICAS E OS RETORNOS OBSERVADOS DOS ATIVOS FINANCEIROS

Empiricamente, observa-se que as **caudas** da distribuição dos retornos de um ativo financeiro são mais **pesadas** do que as **caudas** da distribuição normal. Uma distribuição que oferece alternativa para contornar o problema das **caudas pesadas** é a chamada **distribuição hiperbólica**, assim denominada pelo fato de seu logaritmo ser uma hipérbole. Uma particular parametrização dessa densidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$hip(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta \cdot K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right) \quad [4]$$

na qual  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\delta$  são parâmetros e  $K_1$  é a função de Bessel modificada de terceiro tipo e índice 1. Os primeiros dois parâmetros ( $\alpha$  e  $\beta$ ) determinam a forma da distribuição;  $\mu$  é a média e  $\delta$  representa um fator de escala. A estimativa desses parâmetros não é trivial. Ela envolve um algoritmo de estimativa de máxima verossimilhança,

(1) Há considerável evidência na literatura acadêmica de que os retornos não são normais, exibindo *fat tails* e *volatility clusterings* (Kim & Kon, 1994).

(2) A abordagem proposta aqui não faz justiça à obra dos autores citados. Recomenda-se fortemente a consulta às referências para que o objetivo da implementação seja corretamente compreendido.

assumindo-se que as variáveis sejam independentes e identicamente distribuídas, com  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $0 \leq |\beta| < \alpha$ . Por causa das restrições sobre os valores dos parâmetros e da presença de uma função de Bessel não é possível utilizar os algoritmos de minimização usuais. Além do mais, há problemas teóricos com respeito à convergência. Perante todos esses problemas, parece difícil que essa metodologia tenha chance de ser utilizada diariamente pelos praticantes do mercado, com raras exceções. Neste trabalho, com base em argumentações plausíveis, mas não rigorosamente justificáveis, procura-se fazer tão-somente uma estimativa rude dos referidos parâmetros, com vistas a avaliar o impacto dessa aproximação sobre o cálculo do VaR de um dado portfólio.

### UM ALGORITMO SIMPLES PARA A ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO HIPERBÓLICA

Neste tópico, descreve-se um algoritmo simples para a estimativa dos parâmetros da distribuição hiperbólica e, também, como ele pode ser utilizado para o cálculo do VaR paramétrico.

O cerne desta abordagem consiste em admitir que a distribuição gaussiana ordinária possa servir como **aproximação inicial** para a distribuição hiperbólica. Na seqüência é feita uma nova aproximação, dessa vez entre a distribuição real e a distribuição hiperbólica. Matematicamente, o procedimento é o descrito a seguir.

Seja um histograma dos retornos de um dado portfólio obtido empiricamente. Seja, também, a distribuição gaussiana ajustada para esses dados:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad [5]$$

Como foi dito, admite-se que essa distribuição seja uma aproximação de uma distribuição hiperbólica. Segundo as propriedades dessa última, isso é plausível se  $\delta \rightarrow \infty$  e  $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$ . Os demais parâmetros são trivialmente obtidos. Assim, em primeira aproximação, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 2 \times \sigma \\ \beta_0 &= 0 \\ \mu_0 &= \mu \\ \alpha_0 &= \delta_0 / \sigma^2 \end{aligned} \quad [6]$$

nos quais o índice 0 indica que os valores dos parâmetros são iniciais.

Como se pode ver, dentre esses valores apenas  $\delta_0$  é difícil de ser avaliado, pois se trata de um valor assintótico. A justificativa para o valor adotado aqui é a seguinte: como se trata de um fator de escala,  $\delta_0$  deve ser relacionado ao desvio-padrão, e como ele deve ser grande, colocou-se o fator 2 que, evidentemente, poderia ser diferente; observou-se nos cálculos que o fator 2 fornece resultados mais satisfatórios.

Por conseqüência, a distribuição hiperbólica inicial resulta:

$$hip^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - \beta_0^2}}{2\alpha\delta_0 \cdot K_1(\delta_0 \sqrt{\alpha_0^2 - \beta_0^2})} \exp\left(-\alpha_0 \sqrt{\delta_0^2 + (x - \mu_0)^2} + \beta_0(x - \mu_0)\right) \quad [7]$$

Para evitar problemas numéricos consideráveis com a função de Bessel, **por simplificação** admite-se que seu argumento seja da ordem de 1<sup>(3)</sup>. Para tanto, os

(3) Para argumentos iguais a 1 e menores do que 1 vale a forma assintótica da função de Bessel:  $K_1(x) \approx 1/x$  (vide, por exemplo, Abramowitz & Stegun, 1968). Como é evidente, essa aproximação evita os problemas com a função de Bessel e será utilizada em todo este trabalho.

valores dos parâmetros devem ser ligeiramente alterados. Essa exigência vai ser satisfeita minimizando-se a quantidade<sup>(4)</sup>:

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^N \left| \text{hip}^{(0)}(x_i) - g(x_i) \right| \quad [8]$$

na qual  $x_i$  representa a coordenada de um bloco do histograma de retornos do ativo (portfólio) em questão e  $N$  o número de blocos.

Não há problemas de convergência para essa minimização. Os novos parâmetros obtidos são definidos como:  $\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \delta_1$ .

Portanto, a expressão para a distribuição hiperbólica inicial resulta:

$$\text{hip}^{(1)}(x) = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - \beta_1^2}}{2\alpha\delta_1 \cdot K_1(\delta_1 \sqrt{\alpha_1^2 - \beta_1^2})} \exp\left(-\alpha_1 \sqrt{\delta_1^2 + (x - \mu_1)^2} + \beta_1(x - \mu_1)\right) \quad [9]$$

De posse dessa distribuição, o próximo passo é usá-la como aproximação inicial para tentar uma boa aderência aos dados do mercado. Mais uma vez, de forma bastante simplificada, minimiza-se a quantidade:

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^N \left| \text{hip}^{(1)}(x_i) - \text{emp}(x_i) \right| \quad [10]$$

impondo, agora, que o argumento da função de Bessel seja da ordem<sup>(5)</sup> de 0.1. Em [10],  $\text{emp}$  e  $\text{hip}^{(1)}$  são, respectivamente, as distribuições **empírica** e hiperbólica inicial,  $x_i$  e  $N$  são como antes. Tem-se, então, dessa nova minimização:  $\alpha_2, \beta_2, \mu_2, \delta_2$ . Finalmente, a distribuição hiperbólica que melhor se ajusta aos dados experimentais, de acordo com o algoritmo aqui desenvolvido, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{hip}^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2}}{2\alpha\delta_2 \cdot K_1(\delta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2})} \exp\left(-\alpha_2 \sqrt{\delta_2^2 + (x - \mu_2)^2} + \beta_2(x - \mu_2)\right) \quad [11]$$

## IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

Descreve-se neste tópico, passo a passo, um exemplo de aplicação do algoritmo supradesenvolvido para a avaliação do VaR de um dado portfólio.

### Descrição do portfólio-teste

O que se chama aqui de **portfólio-teste** corresponde, na realidade, a uma carteira fictícia composta exclusivamente pelas ações que integram o Índice Bovespa. Para tanto, foram calculados os **retornos diários** no período de 2 de janeiro de 1996 à 31 de dezembro de 1999, definidos como:

$$\text{ret} = \ln\left(\frac{\text{Ibov}_t}{\text{Ibov}_{t-1}}\right) \quad [12]$$

em que  $\text{Ibov}_t$  é o Ibovespa no dia  $t$ .

Com base nesses retornos, foi construído o histograma da figura 1.

### Determinação da distribuição inicial

De posse do histograma da figura 1, o próximo passo é a determinação da distribuição normal correspondente, a qual é mostrada na figura 2 (os parâmetros são:  $\mu = 0,00135$ ;  $\sigma = 0,0283$ ).

(4) Poderia causar surpresa o fato de não se minimizar o quadrado dessa diferença. O motivo é que [8] forneceu resultados mais satisfatórios para os exemplos aqui testados. Não será discutida aqui a razão disso.

(5) A razão para isso vem do fato de essa ser a ordem de grandeza do argumento da função de Bessel obtida pelo algoritmo de Eberlein, Keller & Prause (1998).

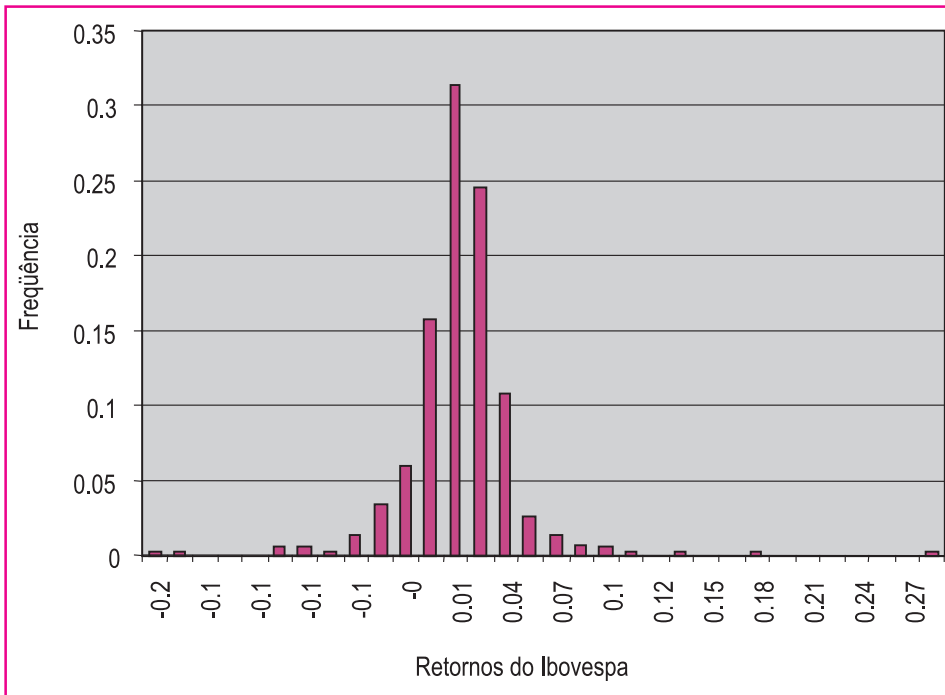


Figura 1: Histograma Normalizado de Retornos do Ibovespa

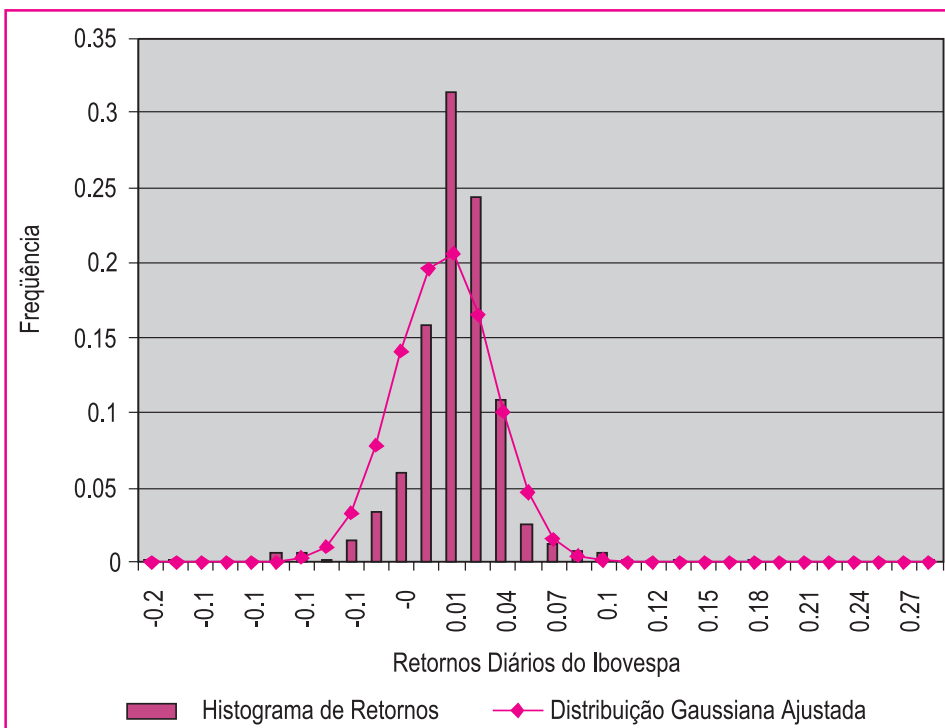


Figura 2: Distribuição Normal

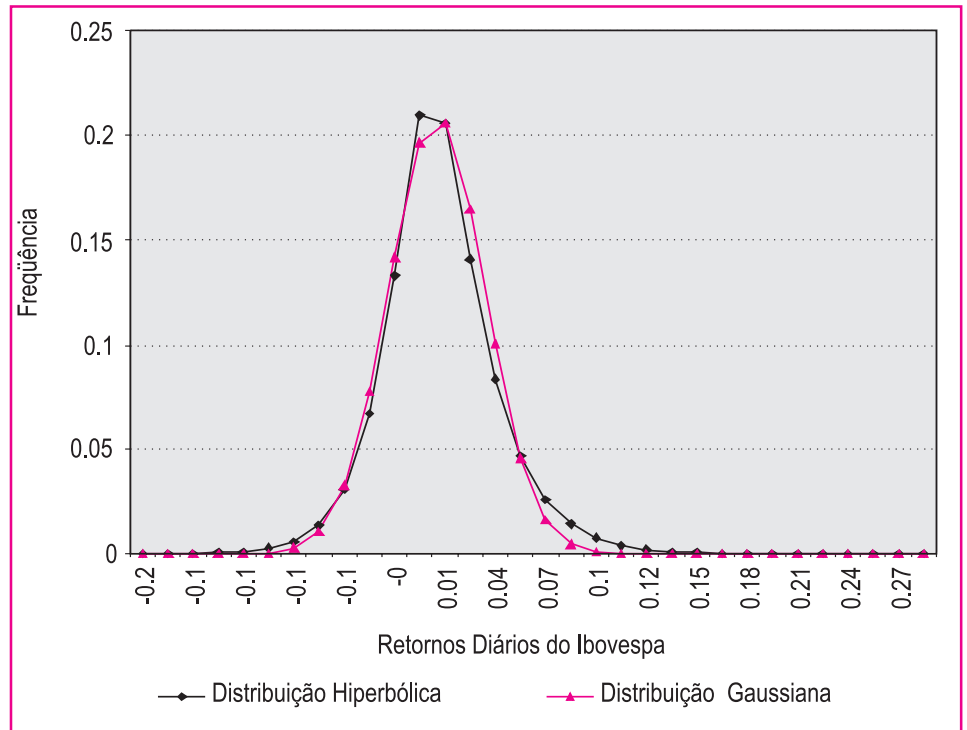
De acordo com [6], tem-se:  $\delta_0 = 0,0566$ ;  $\alpha_0 = 70,68$ ;  $\beta_0 = 0$ ;  $\mu_0 = 0,00135$ .

Agora, aplicando-se a minimização [8], pode-se obter a primeira aproximação da distribuição hiperbólica. O valor obtido foi  $\Delta_1 = 1,22 \times 10^{-1}$ , conseguido com 15 iterações<sup>(6)</sup>. Os parâmetros dessa distribuição são:

(6) Para as minimizações feitas aqui, o algoritmo utilizado foi o *Generalized Reduced Gradient* (GRG2) de Lasdon-Waren, implementado no *Solver* do *Microsoft Excel*. Utilizaram-se as seguintes especificações: Iterações = 100; Precisão = 0.000001; Tolerância = 5%; Convergência = 0.001; Estimativas = tangente; Derivadas = adiante; Pesquisar = Newton.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 49,98 \\
 \beta_1 &= 7,42 \\
 \mu_1 &= -5,19 \times 10^{-3} \\
 \delta_1 &= 0,02023
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Na figura 3 mostra-se a distribuição hiperbólica obtida, juntamente com a distribuição normal.



**Figura 3: Distribuição Hiperbólica Inicial e Distribuição Normal**

### Determinação da distribuição hiperbólica

Finalmente, de acordo com o algoritmo aqui desenvolvido procede-se à minimização [10]. O valor obtido foi  $\Delta_2 = 9,86 \times 10^{-2}$  (14 iterações). Como resultado, foram obtidos os parâmetros seguintes:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= 59,31 \\
 \beta_2 &= 2,063 \\
 \mu_2 &= 1,03 \times 10^{-2} \\
 \delta_2 &= 0,00843
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Na figura 4 apresenta-se o histograma empírico da série de retornos considerada, juntamente com a distribuição hiperbólica ajustada a esses dados pelo algoritmo desenvolvido. Para facilitar a visualização, são utilizadas as escalas direta e logarítmica.

### Cálculo do VaR paramétrico usando distribuições hiperbólicas

Como visto anteriormente, o cálculo do VaR exige a avaliação numérica da integral [3], na qual  $f(r)$  é dada por [11], observando-se [14]. Em outras palavras, quer-se  $\beta$  para que a igualdade [3] se verifique. O método numérico que será usado aqui para fazer a

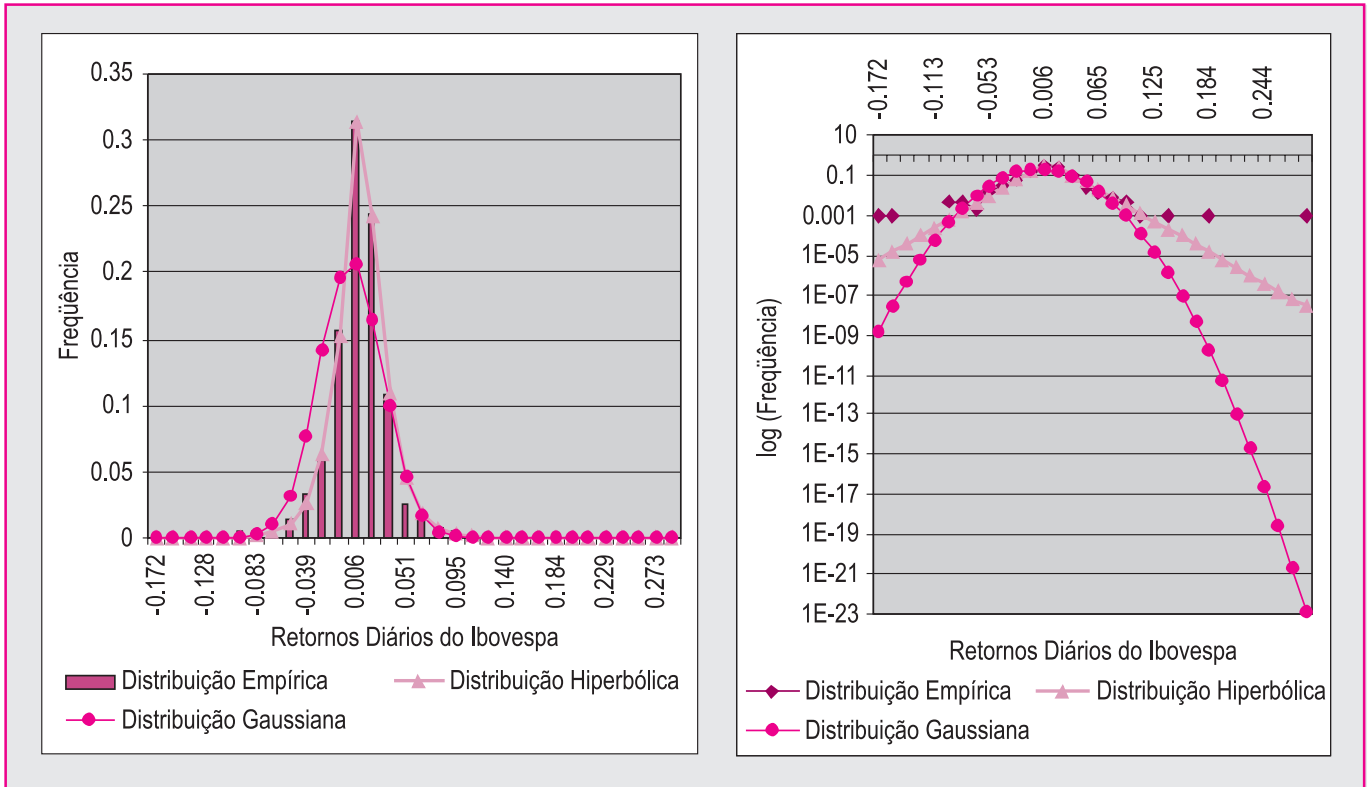


Figura 4: Histograma Empírico da Série de Retornos, Distribuição Hiperbólica Ajustada e Distribuição Normal (Escala Direta e Logarítmica)

integração é a muito difundida **Quadratura Gaussiana**<sup>(7)</sup>. Assim, para vários níveis de probabilidade (vários  $p$ ), determinou-se o  $\beta$  correspondente em duas situações: para  $f(r)$  gaussiana e para  $f(r)$  hiperbólica, através de aproximações sucessivas, admitindo-se uma tolerância de 0,05%. Os resultados são mostrados na figura 5.

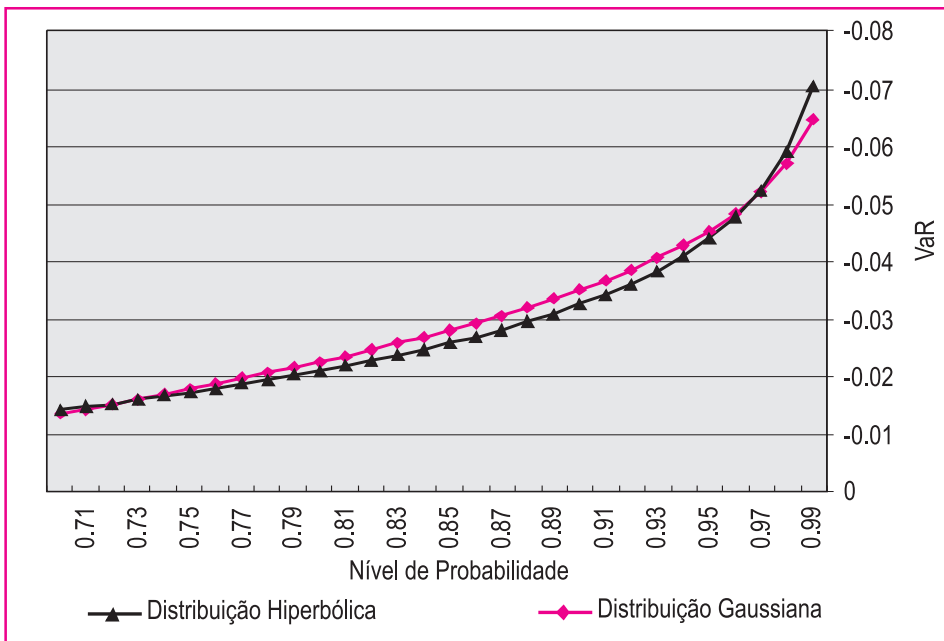


Figura 5: Confrontação entre as Metodologias

(7) Na implementação aqui apresentada, o erro no cálculo da integração é de, aproximadamente, 0,4%.

## O BACKTESTING

O Comitê da Basileia (1996) sugere que seja feita uma avaliação de desempenho das metodologias de cálculo do VaR. Será feita, então, uma avaliação da **qualidade** do VaR calculado pelo algoritmo desenvolvido neste trabalho.

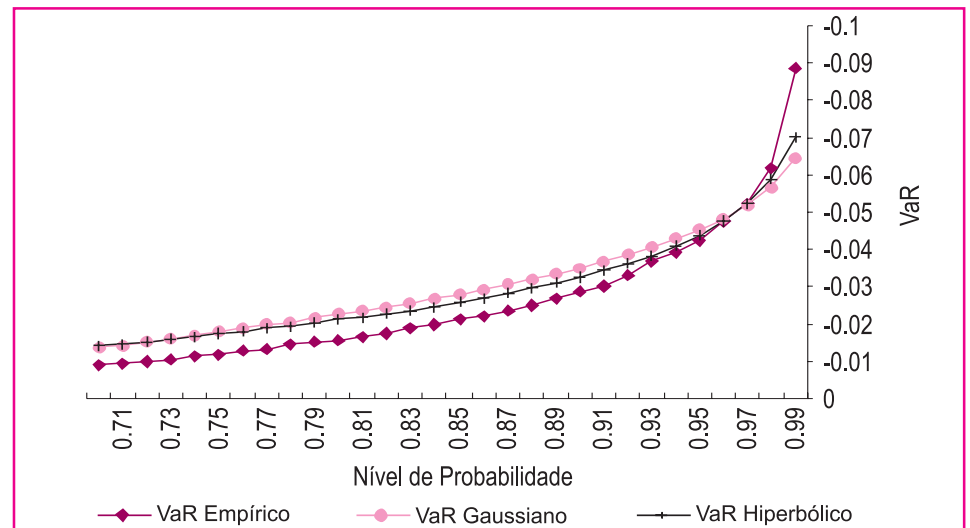
A primeira medida da **qualidade do VaR** é dada por uma simples contagem. Essa contagem é melhor estabelecida pela chamada distribuição de Bernoulli (com parâmetro  $y$ ), definida por:

$$f(X(t) | y) = \begin{cases} y^{X(t)}(1-y)^{(1-X(t))}, & X(t) = 0 \text{ ou } 1 \\ 0, & X(t) \neq 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad [15]$$

O número total de violações do VaR sobre um período  $T$  é:

$$X_T = \sum_{t=1}^T X(t) \quad [16]$$

Na prática, pode-se proceder da seguinte maneira: dada a série histórica de retornos para o portfólio em questão (no caso, mil observações), faz-se a classificação desses retornos em ordem crescente, indexando cada retorno com os números 1, 2, 3, ... A seguir, por definição, o VaR para cada nível de probabilidade é obtido aplicando-se [15]. Por exemplo: o VaR de 99% é igual ao retorno de número  $1.000 \times (1 - 0.99) + 1 = 11$ ; o VaR de 95% é o retorno de número  $1.000 \times (1 - 0.95) + 1 = 51$ ; e assim por diante. Com isso, obtém-se a curva do VaR empírico constante na figura 6. Nessa figura também se mostra a comparação entre as metodologias de cálculo paramétrico e o *backtesting* correspondente.



**Figura 6: Curva do VaR Empírico e Comparação entre as Metodologias de Cálculo Paramétrico e o Backtesting**

Para uma avaliação mais quantitativa, foram feitas as regressões VaR Gaussiano *versus* VaR Empírico e VaR Hiperbólico *versus* VaR Empírico, mostradas nas figuras 7 e 8.

## OUTROS EXEMPLOS

Na mesma linha dos trabalhos citados, constam na tabela após as figuras 7 e 8 os parâmetros estimados para outros ativos (no caso, ações da Bovespa e outros índices) com o auxílio do algoritmo desenvolvido neste artigo. Na seqüência são apresentadas as respectivas distribuições (figuras de 9 a 14, nas escalas direta e logarítmica).

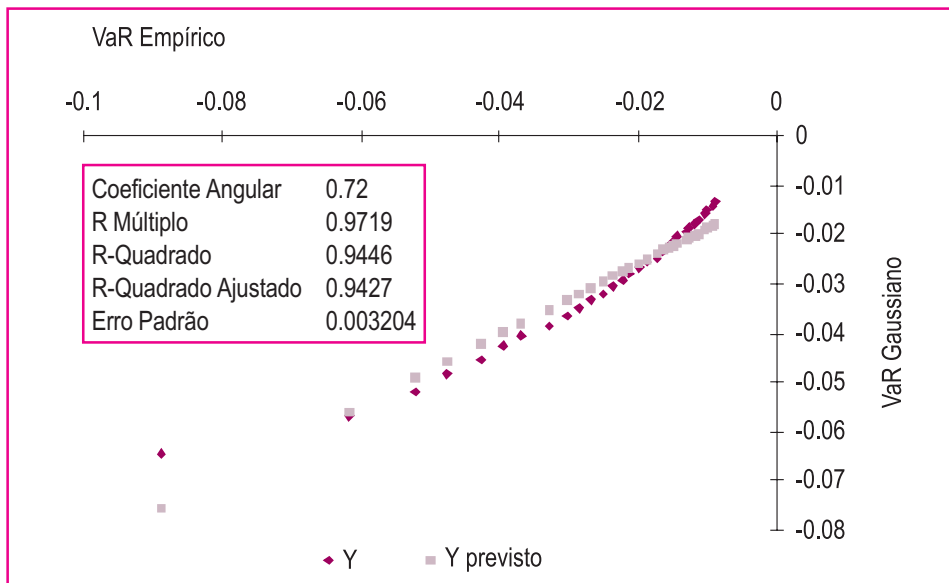


Figura 7: VaR Gaussiano versus VaR Empírico

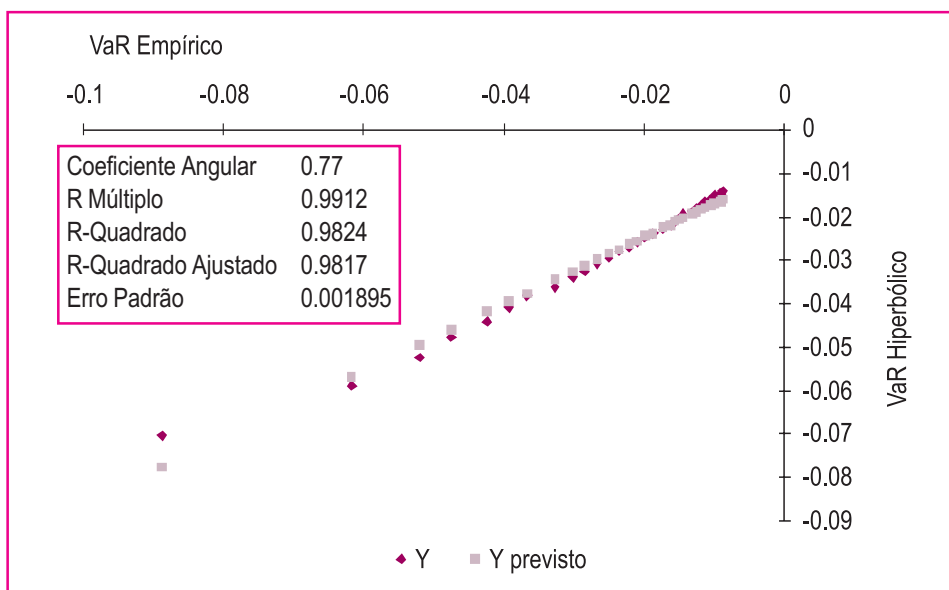


Figura 8: VaR Hiperbólico versus VaR Empírico

Parâmetros Estimados para Outros Ativos

Ativo	Parâmetros			
	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$
ACES4	44,68	-0,50	0,0111	0,0015
ARCZ6	47,84	-0,75	0,00209	0,0116
CRUZ3	70,88	8,77	0,0071	0,00449
CSNA3	54,4	-1,845	0,00919	0,00785
ÍNDICE FGV-100	118,29	-0,00175	0,0042	0,00635
ÍNDICE IEE	55,78	-0,0019	0,0089	0,0158

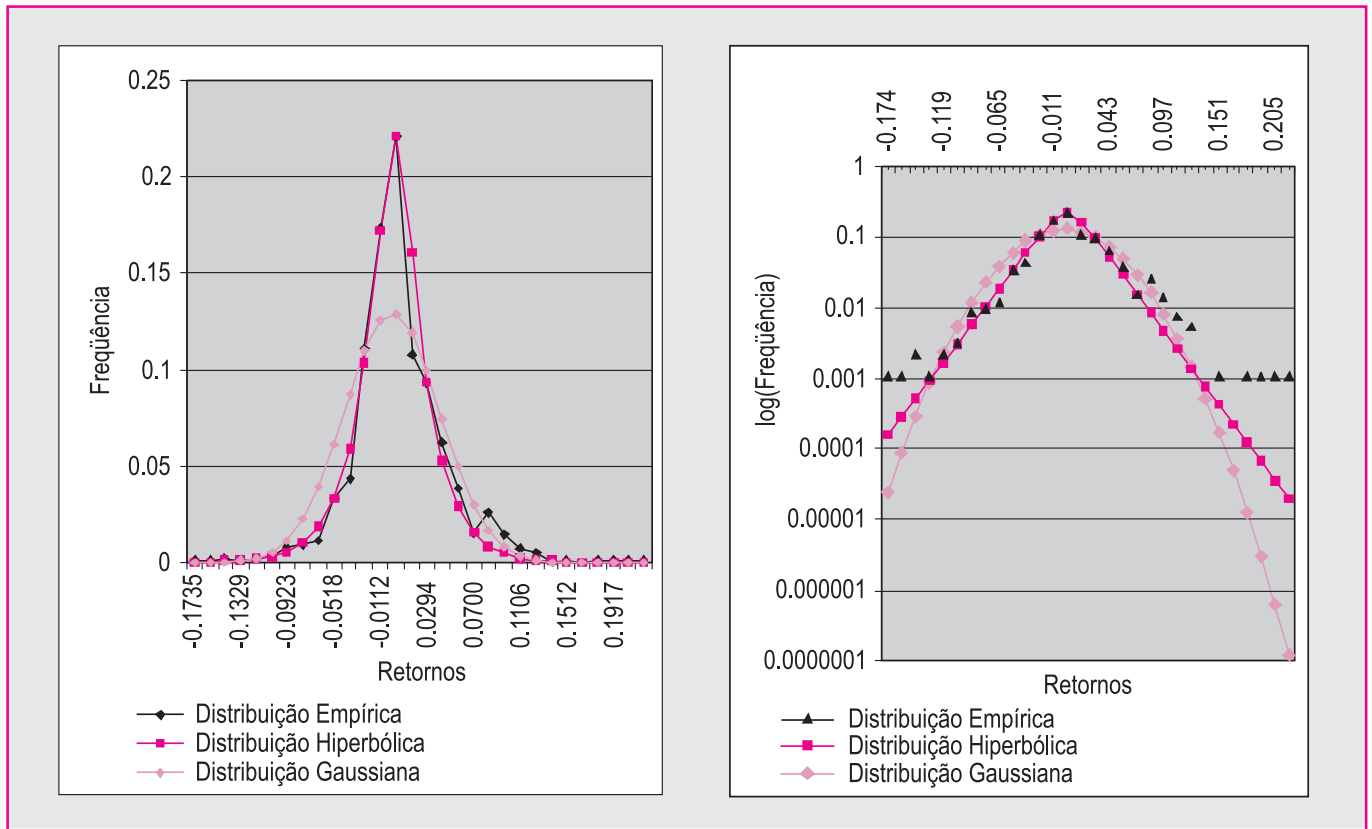


Figura 9: Distribuições — Ativo ACES4 (Escala Direta e Logarítmica)

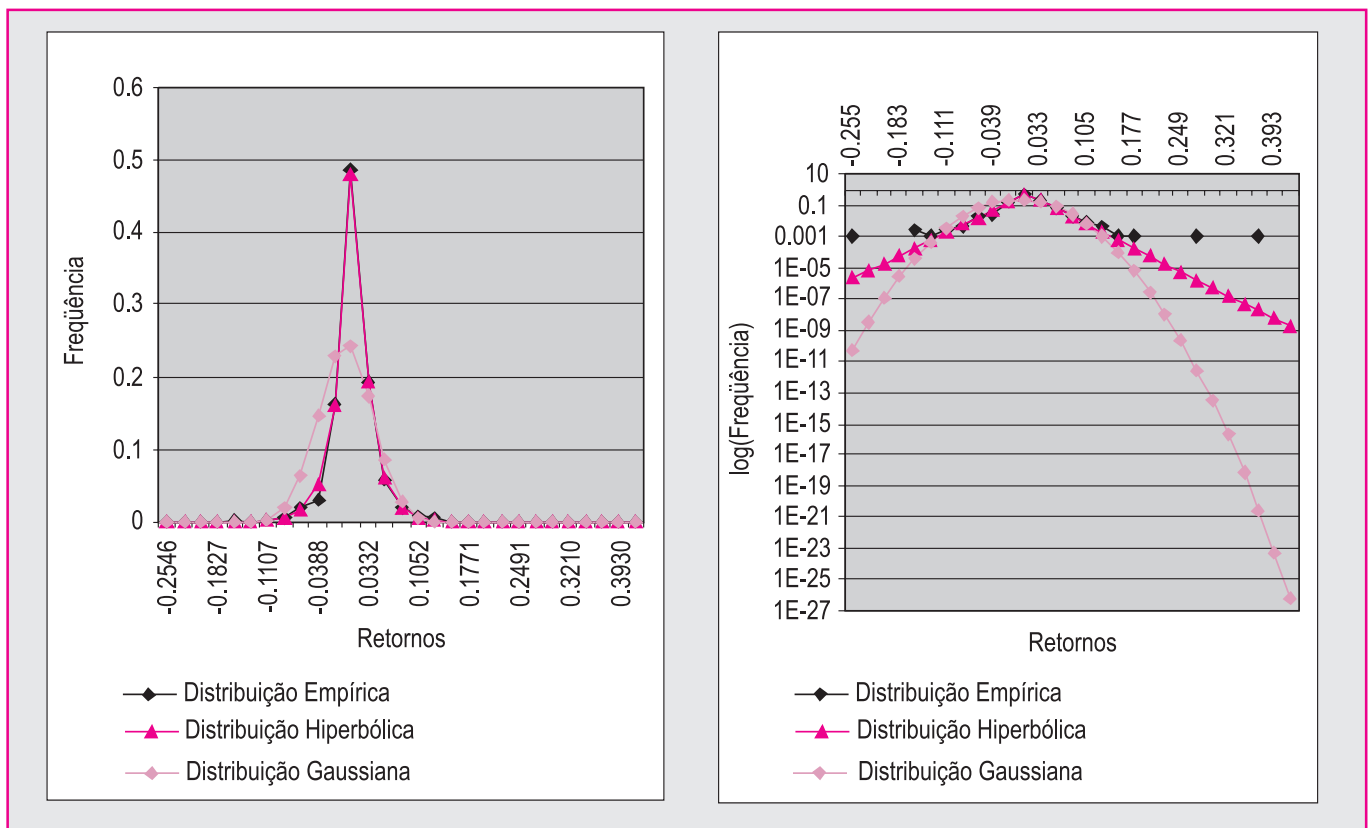


Figura 10: Distribuições — Ativo ARCZ6 (Escala Direta e Logarítmica)

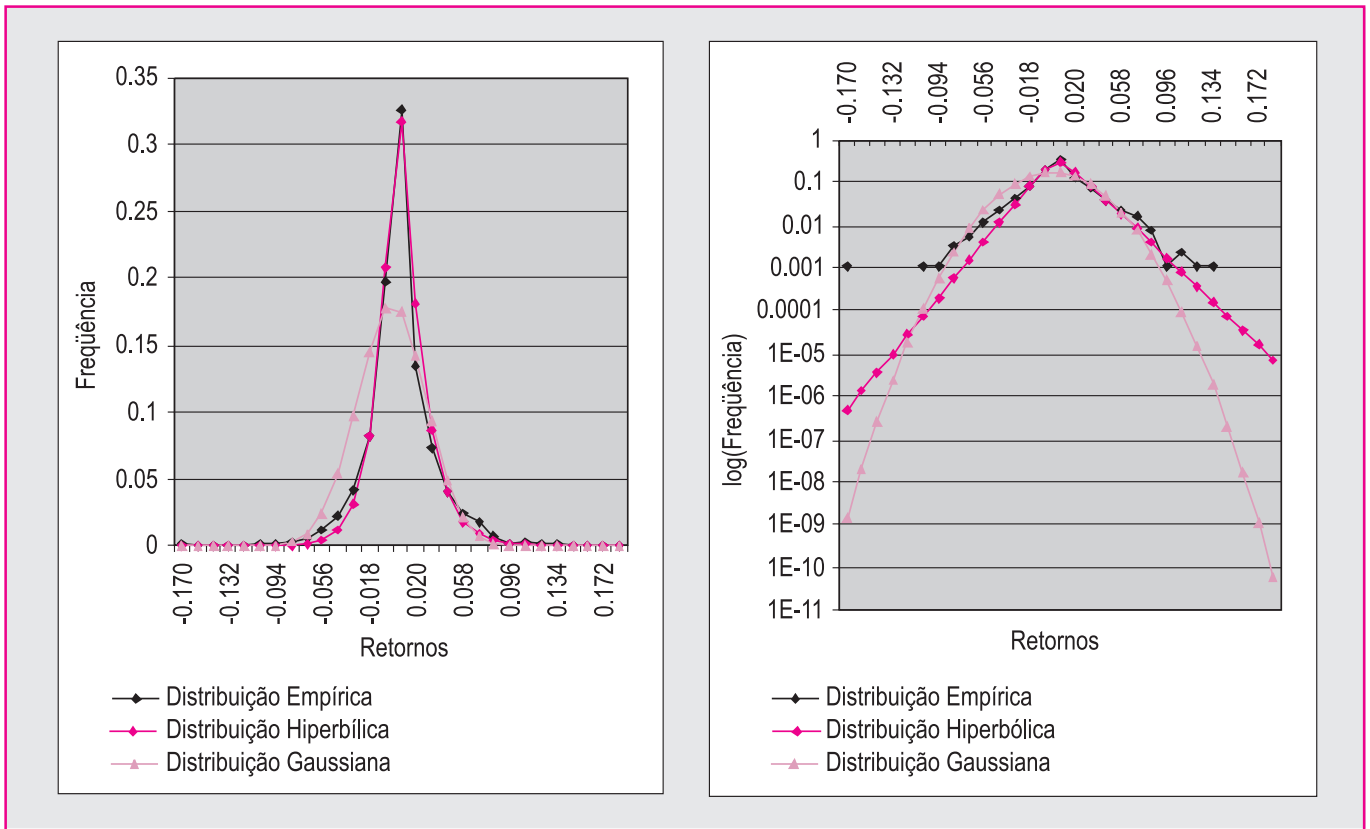


Figura 11: Distribuições — Ativo CRUZ3 (Escala Direta e Logarítmica)

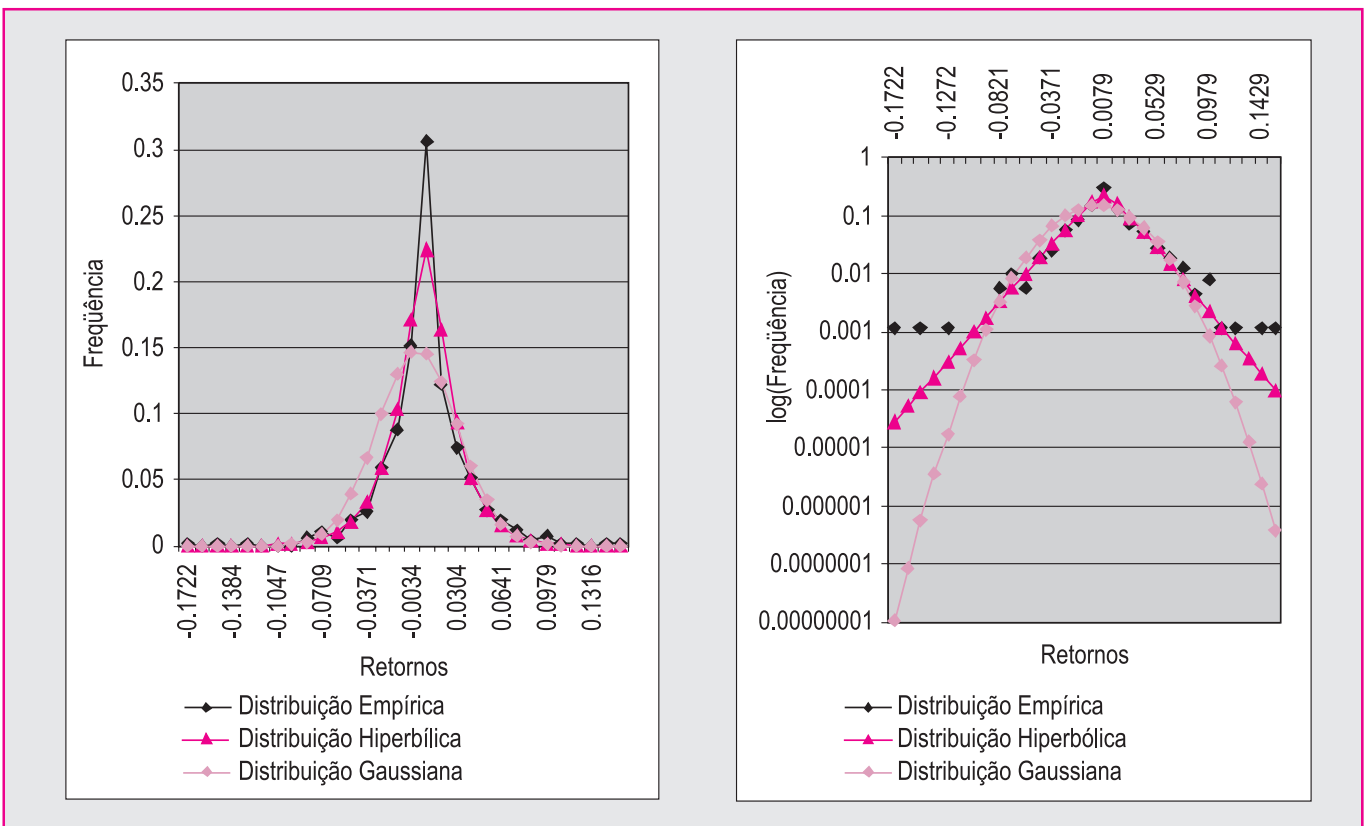


Figura 12: Distribuições — Ativo CSNA3 (Escala Direta e Logarítmica)

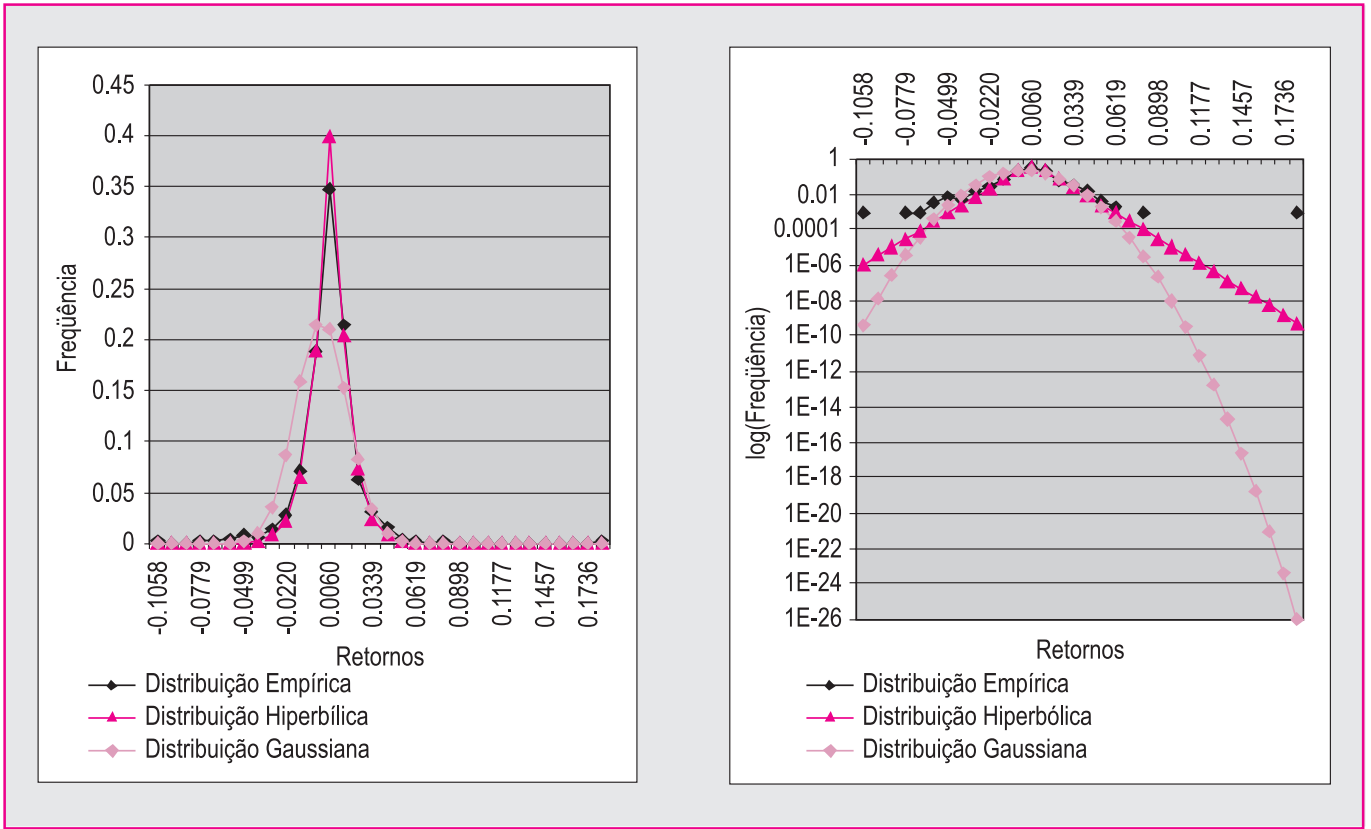


Figura 13: Distribuições — Ativo Índice FGV-100 (Escala Direta e Logarítmica)

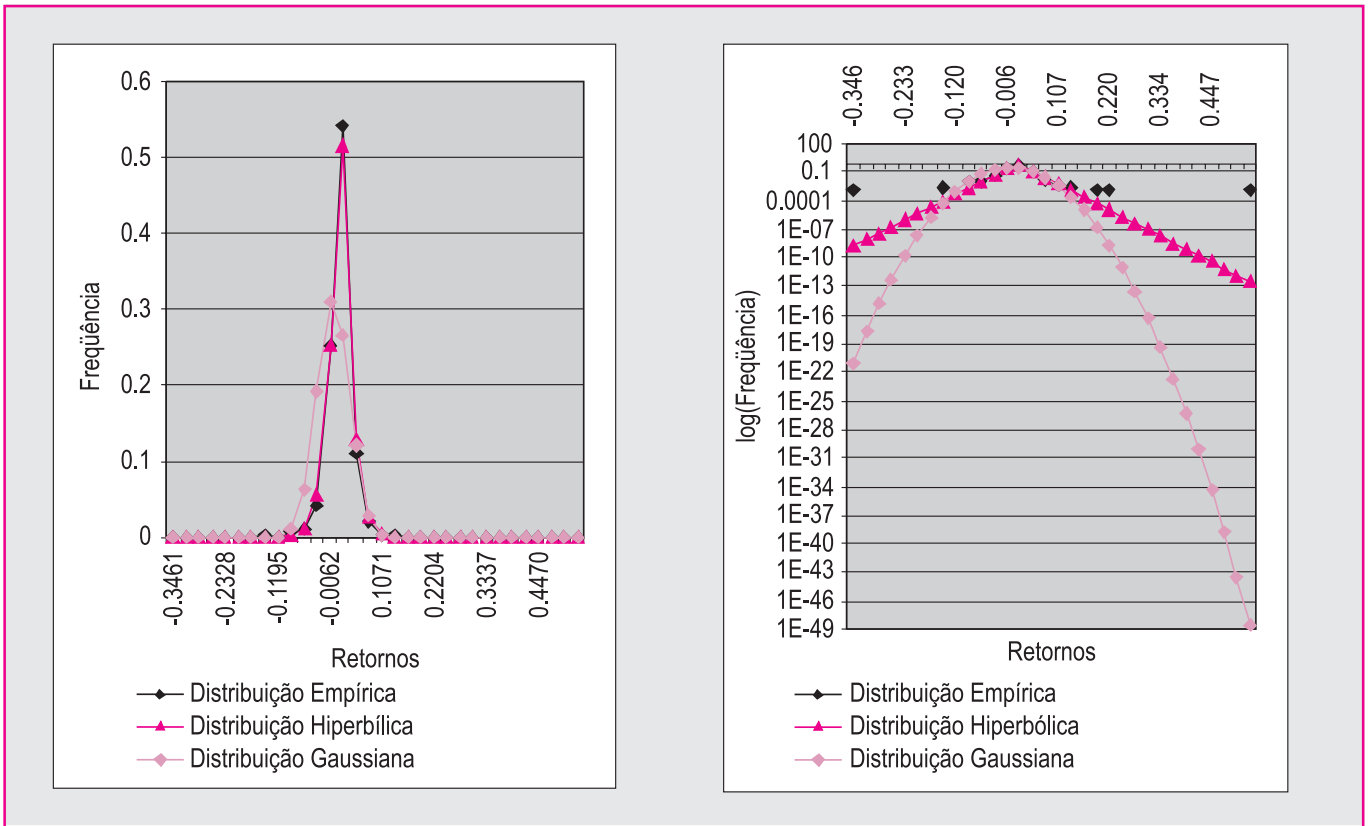


Figura 14: Distribuições — Ativo Índice IEE (Escala Direta e Logarítmica)

## Observação importante

Os dados empíricos relativos a esses ativos correspondem aos seguintes períodos:

• ACES4	01/07/1996 — 27/03/2000
• ARCZ6	01/07/1996 — 30/12/1999
• CRUZ3	01/07/1996 — 30/12/1999
• CSNA3	01/07/1996 — 30/12/1999
• ÍNDICE FGV-100	02/01/1996 — 29/12/1999
• ÍNDICE IEE	11/01/1996 — 31/12/1999

Como se vê, as figuras de 9 a 14 mostram um acordo qualitativo bem mais satisfatório entre a distribuição hiperbólica e a distribuição empírica do que entre esta última e a distribuição gaussiana. Esse fato tem, obviamente, implicação direta sobre o cálculo do VaR.

## CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Conforme havia sido enfatizado, o objetivo desta abordagem foi o de desenvolver uma metodologia paramétrica de cálculo do *Value at Risk* (VaR), usando distribuições hiperbólicas, que pudesse ser útil aos praticantes do mercado.

Como a experiência mostra, na maioria das vezes, qualquer empresa nessa direção obriga ao **enfraquecimento** de exigências matemáticas. Aqui isso não é diferente. Entretanto, a presente implementação é perfeitamente admissível como uma alternativa para o algoritmo de Eberlein, Keller & Prause, do ponto de vista prático. Vale lembrar que se deve ter em mente que essa abordagem, a despeito de plausível, não é rigorosamente justificada.

De acordo com os resultados aqui relatados, o VaR paramétrico obtido pela distribuição hiperbólica está superestimado, exceção feita ao VaR > 97% (figura 6). Comportamento praticamente idêntico pode ser observado em Eberlein, Keller & Prause (1998, figura 11). No entanto, analisando essa figura 11, percebe-se que a presente implementação não foi capaz conseguir nível de precisão muito satisfatório. Esse fato é certamente devido às aproximações utilizadas, sobretudo em relação à função de Bessel. Outro aspecto importante a salientar é que os dados empíricos foram considerados sem qualquer filtragem, ou seja, não houve a preocupação de extrair os chamados *outliers*. Uma análise mais pormenorizada a esse respeito pode causar, sem dúvida, alterações no histograma empírico e, por conseguinte, na distribuição de probabilidade obtida.

A observação das figuras de 9 a 14 permite concluir que, em princípio, um acordo qualitativo muito bom é conseguido com o algoritmo desenvolvido. Contudo, como o método não contempla uma otimização propriamente dita, tal acordo faz sentido como uma primeira aproximação. A confrontação com os resultados de Eberlein, Keller & Prause (1998) parece indicar que há uma **subestimação** do parâmetro  $\alpha$  por um fator de aproximadamente 2 e uma **superestimação** de  $\delta$  pelo mesmo fator. Entretanto, o maior erro parece ficar com o parâmetro  $\beta$ . Contudo, esses fatos não comprometem seriamente a metodologia aqui desenvolvida. Deve ser notado, também, que a distribuição hiperbólica final é muito sensível aos valores iniciais dos parâmetros, ou seja, os valores indexados com **1** neste trabalho. Outra estimativa desses valores deverá alterar a distribuição final, mas a ordem de grandeza dos parâmetros será mantida.

Observando os resultados das regressões (figuras 7 e 8), nota-se que a distribuição hiperbólica tem um ajuste de mais qualidade do que a distribuição gaussiana. Isso se deve ao fato de, próximo ao nível de probabilidade de 97%, a curvatura da distribui-

ção hiperbólica distanciar-se mais acentuadamente da curvatura da distribuição normal, aproximando-se mais da curvatura da distribuição empírica.

Concluindo, resta dizer que, do ponto de vista prático, apesar de sua formulação não-rigorosa, o algoritmo aqui descrito pode ser de certa utilidade para uma rápida e, ao mesmo tempo, um pouco mais realista estimativa do *Value at Risk*. ♦

## RESUMO

Neste artigo é proposto um algoritmo simplificado para a estimativa do *Value at Risk* (VaR), utilizando-se distribuições hiperbólicas. A razão para tal proposta é a dificuldade de utilização do método desenvolvido por Eberlein, Keller & Prause (1998) na prática diária do mercado. Foi feita uma implementação detalhada do algoritmo em um portfólio fictício, assim como uma confrontação com o VaR gaussiano e com os resultados empíricos (*backtesting*) para vários ativos. O algoritmo forneceu resultados satisfatórios e, em princípio, pode ser uma ferramenta útil para os praticantes do mercado.

**Palavras-chave:** risco, portfólio de ativos, *value at risk* (VaR), distribuição hiperbólica, distribuição gaussiana.

## ABSTRACT

In this paper a simplified algorithm for the estimate of the Value at Risk (VaR) is proposed, by using hyperbolic distributions. The reason for such a proposal is the difficulty of use of the method developed by Eberlein, Keller & Prause (1998) in the market's daily practice. A detailed implementation of the algorithm in a fictitious portfolio was made, as well as a confrontation with the gaussian VaR and with the empiric results (*backtesting*) for several assets. The algorithm supplied satisfactory results and, in principle, it can be a useful tool for the practitioners of the market.

**Uniterms:** risk, assets portfolio, value at risk (VaR), hyperbolic distribution, gaussian distribution.

## RESUMEN

En este trabajo se propone un algoritmo simplificado para la estimación del *Value at Risk* (VaR), usando distribuciones hiperbólicas. La razón para esta propuesta es la dificultad de uso del método desarrollado por Eberlein, Keller & Prause (1998) en la práctica diaria del mercado. Una aplicación detallada del algoritmo en una carpeta ficticia fue hecha, así como una confrontación con el VaR gaussiano y con los resultados empíricos (*backtesting*) para varios activos. El algoritmo proporcionó resultados satisfactorios y, en principio, puede ser una herramienta útil para los practicantes del mercado.

**Palabras-clave:** riesgo, carpeta de activos, *value at risk* (VaR), distribución hiperbólica, distribución gaussiana.

REFERÊNCIAS  
BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. *Handbook of mathematical functions*. New York, Dover, 1968.
- BANCO J.P. MORGAN. *RiskMetrics*. New York, J.P. Morgan/ Reuters, 1996. [Technical Document]
- BARNDORFF-NIELSEN, O.E. & PRAUSE, K. *Apparent scaling*, Aarhus, Denmark, University of Aarhus, out. 1999. [Department of Theoretical Statistics- Research Report n.408]
- BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (Comitê da Basileia). *Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements*. Basle, Switersland, Basle Committee, 1996.
- EBERLEIN, E. & KELLER, U. *Hyperbolic distributions in finance*. Bernoulli 1, p.281-299, 1995.
- EBERLEIN, E. & KELLER, U. *The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures*. Freiburg, Germany, Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, 1998. [Technical Paper n.56]
- EBERLEIN, E.; KELLER, U.; PRAUSE, K. New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model. *Journal of Business*, n.71, p.371-405, 1998.
- KIM, D. & KON, S. Alternative models for the conditional heterocedasticity of stock return. *Journal of Business*, v.67, n.4, 1994.
- KON, S. Models of stock return — a comparison. *Journal of Finance*, v.39, n.1, 1984.