
O princípio da mínima entropia relativa local aplicado ao apreçamento de opção

Gustavo Aleixo de Oliveira
José de Oliveira Siqueira
Christian Johannes Zimmer

RESUMO

Neste artigo são apresentadas as recentes aplicações das ferramentas da Teoria da Informação na estimação da Densidade Neutralizadora do Preço da Incerteza (DN). São discutidos os princípios de Máxima Entropia, de Mínima Entropia Relativa e, finalmente, o princípio de Mínima Entropia Relativa Local proposto recentemente por Edelman (2001). Os modelos são estimados para dados do mercado brasileiro de opções e comparados com uma alternativa proposta anteriormente na literatura por Jackwerth & Rubinstein (1996). No exemplo apresentado, o modelo de Edelman mostra-se bastante robusto e com características teóricas e práticas superiores às dos outros modelos implementados.

Recebido em 11/março/2002
Aprovado em 12/setembro/2002

Palavras-chave: função de densidade neutralizadora do preço da incerteza, entropia relativa, apreçamento de opção, derivativo.

1. INTRODUÇÃO

Um derivativo no mercado de capitais é um produto financeiro cujo pagamento depende do valor de um ativo subjacente. Para avaliar um derivativo, precisa-se de uma medida que dê pesos objetivos aos possíveis estados da natureza futuros. Essa medida é chamada medida neutralizadora do preço da incerteza (DN) e sob ela os preços descontados dos ativos são *martingales*⁽¹⁾.

Formalmente, suponha-se um mercado de capitais modelado a partir de um espaço mensurável filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, F = (F_t)_{t \in [0, T]})$, sendo que F satisfaz as condições usuais e P é uma medida de probabilidade nesse espaço. O processo $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$, $T \in \mathfrak{R}$, definido sobre o conjunto dos reais, contínuo e limitado, representa o ativo básico descontado, do qual dependerá o contrato derivativo. Nesse modelo, sabe-se que, sob a hipótese de *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR — *No Free Lunch* com incerteza evanescente) o conjunto $M(S)$ das medidas (locais) *martingales* equivalentes possui ao menos um elemento, isto é, $M(S) \neq \emptyset$ ⁽²⁾.

Neste artigo, assume-se a existência de mais de uma medida neutralizadora, o que significa que o mercado financeiro é incompleto. Sob todas essas medidas $Q \in M(S)$, o processo do preço S é um *martingale* local. O problema é, então: Qual medida escolher para avaliar o derivativo?

Gustavo Aleixo de Oliveira, Mestre em Economia pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é *Portfolio Manager* do BankBoston Asset Management, São Paulo, São Paulo, Brasil.
E-mail: goliveira@bkb.com.br

José de Oliveira Siqueira é Professor Doutor do Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e do Instituto de Pesquisas Econômicas da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil.
E-mail: siqueira@usp.br

Christian Johannes Zimmer, Mestre em Administração e Matemática pela Universidade Técnica de Berlim (Alemanha), é Doutorando em Administração na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil.
E-mail: c.zimmer@gmx.de

Assume-se, ainda, que para cada $t \in [0, T]$, S_t não é só contínuo, mas também tem uma densidade $p_t^{(3)}$:

$$p_t(B) = \frac{dP}{d\lambda}(B), B \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}).$$

Como cada $Q \in M(S)$ é equivalente a P , o que permite escrever:

$$\left[\frac{dQ}{dP} \right]_t(B) = f_t^Q(B),$$

e como $dQ = q_t d\lambda$:

$$\frac{q_t}{p_t}(B) = f_t^Q(B), \forall t \in [0, T], B \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}),$$

dependendo da medida Q escolhida ter-se-á uma densidade f_t^Q diferente.

Um derivativo do tipo europeu é uma função mensurável H dependente do valor do ativo básico S na maturidade T :

$$H_T = H_T(S_T) \in F_T.$$

Supondo que $E_p[H_T | F_T] < \infty, \forall t \in [0, T]$, calcular-se-á o valor do derivativo como $V_t = E_Q[H_T | F_T], t \in [0, T]$. Em $t = 0$ avalia-se, então, o derivativo como:

$$\begin{aligned} V_0 &= E_Q[H_T] \\ &= \int_{\Omega} H(S_T) dQ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T^Q(x) H_T(x) dx, \end{aligned}$$

sendo que se usou, na última linha, a densidade f_T^Q .

Mais recentemente, a teoria dirigiu grande parte de seus esforços para o desenvolvimento dos chamados Modelos Implícitos. Esses modelos apresentam, a partir de um foco distinto da tradicional especificação direta do processo estocástico de S , uma resposta para o problema da indeterminação da DN. Tenta-se responder à pergunta: O que é possível inferir dos preços de opções observados no mercado a respeito da densidade neutralizadora do preço da incerteza? Desde então, a especificação e a estimação da DN tornaram-se um tema central em Finanças. Oliveira & Silva (2000) apresentam uma série de modelos implícitos e comparam seus desempenhos empíricos relativos para o mercado brasileiro.

No presente artigo, ter-se-á como instrumento os importantes resultados da Teoria da Informação na modelagem da incerteza, particularmente aplicados a Finanças (vide SIQUEIRA, 1999). Essa teoria fornece instrumentos para os tratamentos teórico e empírico do problema de especificação e estimação da DN. Ela possibilita obter uma medida única da DN em condição de incerteza de mercado, sob as hipóteses de merca-

do perfeito e mundo com preço da incerteza neutralizado. Dessa forma, com essa medida única de probabilidade, o preço racional da opção, livre de arbitragem, pode ser prontamente determinado.

Na seção 2, contextualiza-se o artigo dentro da Teoria de Apreçamento de Opção e apresenta-se o problema do sorriso de volatilidades. Na seção 3 discute-se a relevância da Teoria da Informação em Finanças. Os modelos são expostos na seção 4 e implementados na seção 5. Por fim, uma ilustração dos modelos usando dados do mercado brasileiro é feita na seção 6, e as conclusões são apresentadas na seção 7.

2. A DENSIDADE NEUTRALIZADORA DO PREÇO DA INCERTEZA NO MODELO DE BLACK-SCHOLES-MERTON E O SORRISO DE VOLATILIDADES

O modelo de Black-Scholes-Merton (B-S-M) (BLACK & SCHOLES, 1973) usa um Movimento Browniano Geométrico para a modelagem do processo dos preços do ativo subjacente e, a partir daí, define o preço e os parâmetros de *hedging* dos contratos derivativos sobre esses ativos. Esse modelo implica uma DN lognormal e, portanto, toda incerteza é resumida em um único parâmetro: a volatilidade σ do ativo subjacente entre o momento atual e o vencimento do contrato.

Caso o modelo B-S-M reproduzisse perfeitamente o mercado, a partir da volatilidade poder-se-ia determinar o preço da opção ou a partir de um preço dessa opção cotado em mercado poder-se-ia, implicitamente, calcular a volatilidade do ativo subjacente. Em outras palavras, seria possível inverter as fórmulas de avaliação do modelo B-S-M e calcular a chamada volatilidade implícita (VI): a volatilidade que, aplicada ao modelo de B-S-M, resulta em um preço igual àquele negociado no mercado⁽⁴⁾. Por esse modelo, a VI deve ser constante para diferentes preços de exercício e maturidades, uma vez que a volatilidade do ativo subjacente é constante por hipótese. Na prática, não é isso que se observa, significando que o modelo, total ou parcialmente, não pode estar correto. A função da VI é semelhante a um sorriso — o chamado *smile*. Na figura 1 mostra-se o *smile* de volatilidades para opções sobre a Telemar PN negociadas em 20 de junho de 2001 na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). Como se pode ver, há significativo aumento na VI para opções com baixo preço de exercício (opções de compra *in-the-money* e de venda *out-of-the-money*).

Uma outra forma de ver a mesma informação é comparando os preços de mercado com aqueles gerados a partir do modelo de B-S-M. Na tabela da página seguinte consta a comparação dos preços de mercado com aqueles calculados a partir do modelo de B-S-M⁽⁵⁾. Pode-se ver que esse modelo implica significativos desvios com relação aos preços do mercado⁽⁶⁾.

Isso significa que os ganhos do processo básico não seguem uma distribuição lognormal. As propostas de Rubinstein (1994; 1998), assim como os modelos que se baseiam na Teo-

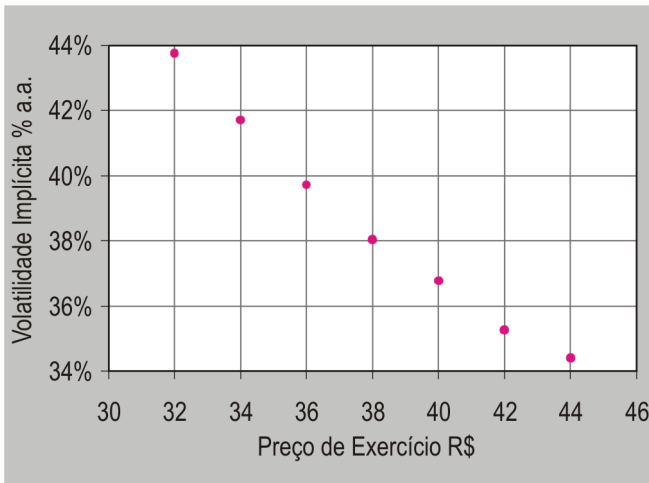


Figura 1: Smile de Volatilidades Implícitas (20/junho/2001)

Comparação de Preços — Mercado versus B-S-M

	Preços de Exercício em Reais						
	32	34	36	38	40	42	44
Preço do Mercado	5,84	4,33	3,03	1,98	1,21	0,66	0,34
Preço CRR*	5,65	4,18	2,96	2,01	1,31	0,82	0,49
Erro R\$	0,19	0,15	0,07	-0,03	-0,10	-0,15	-0,15
Erro %	3%	4%	2%	-2%	-8%	-23%	-43%

* Preço obtido pela árvore binomial de Cox-Ross-Rubinstein (CRR).

ria da Informação, utilizam-se de conhecimentos adicionais — que nesse caso são os preços das opções no mercado — para determinar uma densidade com a qual pode ser diminuído o *smile*. O modelo de expansão de Edgeworth proposto por Rubinstein (1994) ajusta o terceiro e o quarto momentos da distribuição. Por outro lado, os modelos baseados na Teoria da Informação são não-paramétricos e podem ajustar distribuições mais complexas. Assim, nesse aspecto, o conceito da expansão de Edgeworth pode ser visto como um caso especial.

3. A RELEVÂNCIA DA TEORIA DA INFORMAÇÃO EM FINANÇAS

Diversos autores, como Stutzer (1996; 2000), Buchen & Kelly (1996), Gulko (1999a; 1999b), Avellaneda *et al.* (1997), Siqueira (1999) e Edelman (2001), apresentam importantes relações entre a Teoria de Apreçamento de Opção e a Teoria da Informação. A Teoria de Apreçamento de Opção fornece instrumentos (critérios de Máxima Entropia e Mínima Entropia Relativa) adequados para os tratamentos teórico e empírico do problema de especificação e estimação da DN. Por seu intermédio, é possível eliminar a am-

bigüidade resultante de mercados incompletos, sendo ela menos exigente do que a teoria tradicional em suas hipóteses.

3.1. A entropia como medida da incerteza no mercado de capitais

A entropia diferencial da variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade p_T é definida como:

$$h(S_T) := - \int_0^{\infty} p_T(x) \log p_T(x) dx.$$

A utilização da entropia diferencial $h(S_T)$ como medida de incerteza do mercado com relação ao preço futuro S_T pode ser justificada pelas desejáveis propriedades matemáticas dessa densidade e por argumentos econômicos⁽⁷⁾. Dessa forma, é possível criar a relação entre a Hipótese de Mercados Eficientes (HME) e a de Máxima Entropia, e com isso ganhar operacionalidade sobre a HME⁽⁸⁾. Empiricamente, trabalhar-se-á com a versão discreta de entropia (entropia de Shannon), h^{disc} , de uma variável aleatória S_T discreta que pode ser escrita como:

$$h^{disc}(S_T) := - \sum_{\omega \in \Omega} p_T(\omega) \log p_T(\omega).$$

Dentre as características matemáticas da entropia de Shannon que a tornam uma medida de incerteza natural e atrativa (vide COVER & THOMAS, 1991), destacam-se:

- $h(S_T) \geq 0$ — a incerteza de um mercado é sempre não-negativa;
- $h(S_T | I) \leq h(S_T)$ — o condicionamento com relação a qualquer variável aleatória I reduz a entropia; a igualdade ocorre se e somente se S_T e I são independentes;
- $h(S_T^1, \dots, S_T^n) \leq \sum_{i=1}^n h(S_T^i)$ — a igualdade ocorre se e somente se os S_T^i são independentes;
- a distribuição da máxima entropia corresponde à distribuição uniforme. Nesse caso, há ignorância absoluta sobre o valor futuro de S_T . Portanto, a distribuição uniforme limita superiormente a entropia de um mercado;
- a entropia de uma distribuição de probabilidades p é côncava em p .

Essa medida foi utilizada por Stutzer (2000), Buchen & Kelly (1996), Gulko (1999a; 1999b) e Siqueira (1999) como um índice de incerteza do mercado sobre o valor de S_T . Gulko apresenta um modelo de formação de preços em um mercado sob incerteza em que a entropia aparece endogenamente como medida de incerteza relevante.

3.2. A máxima entropia como formalização da eficiência do mercado de capitais

O mercado de capitais é chamado eficiente quando incorpora em seus preços, correta e instantaneamente, toda nova

informação relevante. Como argumenta Siqueira (2001), isso implica um mercado livre de arbitragens, uma vez que elas seriam instantaneamente eliminadas, antes mesmo que o primeiro negócio fosse fechado. Assim, mudando o foco dos preços para as expectativas, um mercado eficiente deve manter-se, constantemente, em estado de máxima ignorância.

Em outras palavras, os preços correntes dos ativos com incerteza refletem a expectativa de mercado (a média aritmética das expectativas subjetivas) sobre o desempenho do preço futuro. Um mercado competitivo equilibra multiformes expectativas subjetivas de tal modo que, a cada momento, uma parte dos investidores hipotéticos imagina que o preço de um ativo irá subir enquanto a outra parte acredita que o preço irá cair. Se esse equilíbrio de expectativas é desfeito, os preços devem alterar-se instantaneamente para retomar o estado de máxima ignorância ou máxima entropia. Esse estado, como se mostrará, é naturalmente descrito pela máxima entropia do mercado. A conclusão é que um mercado é eficiente se, e somente se, ele se ajusta instantaneamente para o estado de máxima entropia⁽⁹⁾.

Assim, há uma relação direta entre os três conceitos: mundo com preço da incerteza neutralizado, mercado informacionalmente eficiente e mercado em estado de máxima entropia.

Como definido na introdução deste artigo, o preço S é um *martingale* (local) sob a medida Q . Então, o mundo com preço da incerteza neutralizada é informacionalmente eficiente, pois o investidor virtual é completamente ignorante a respeito da próxima mudança de preço. Pela argumentação anterior, esse mundo também se ajusta instantaneamente para o estado de máxima entropia. Assim, o critério da máxima entropia formaliza e torna operacional a Hipótese de Mercados Eficientes.

4. A TEORIA DA INFORMAÇÃO NA ESTIMAÇÃO DA DENSIDADE NEUTRALIZADORA

A literatura apresenta alguns trabalhos que se utilizam dos conceitos da Teoria da Informação para a estimação da DN. Entre eles, podem ser destacadas três abordagens:

- **Maximização da Entropia** — Buchen & Kelly (1996), Gulko (1999a; 1999b), Siqueira (1999) e Stutzer (2000).
- **Minimização da Entropia Relativa** — Jackwerth & Rubinstein (1996), Stutzer (1996), Buchen & Kelly (1996) e Avellaneda *et al.* (1997).
- **Minimização da Entropia Relativa Local** — Edelman (2001).

As três abordagens têm em comum o fato de apoiarem-se em uma medida de informação entrópica, mas apresentam características bastante distintas nas interpretações econômicas e resultados empíricos. Essas características serão discutidas a seguir.

4.1. Maximização da entropia (ME)

O Princípio da Máxima Entropia (PME) pode ser descrito como: quando é feita a inferência baseada em informação in-

completa, deve-se fazê-la a partir da distribuição de probabilidade que possui a máxima entropia permitida pela informação disponível.

Portanto, o PME fornece uma regra de processamento ótimo de informação. A entropia mede a quantidade de informação faltante, e a distribuição de entropia máxima é a distribuição menos subjetiva compatível com as restrições dadas, ou melhor, é a menos comprometida com as informações faltantes. Estatisticamente, isso implica que não há razão para preferir qualquer outra distribuição. O princípio geral da máxima entropia é aplicável a qualquer problema com espaço de hipóteses bem-definido e informação incompleta.

Enquanto as estatísticas clássica e bayesiana são especulativas, a de máxima entropia é não-especulativa, isto é, o modelo criado é o mais simples para capturar toda informação das restrições e é o único modelo para o qual as restrições são estatísticas suficientes (vide STUART & ORD, 1989). Portanto, evita-se a consideração de informações não-disponíveis e aproveita-se ao máximo as disponíveis.

O modelo de estimação da densidade neutralizadora baseado na maximização da entropia é fundamentado pelo modelo de Mercados Entrópicos de Gulko (1999a; 1999b). Siqueira (1999) mostra que, sob a hipótese do PME, a fórmula de apreçamento de B-S-M pode ser facilmente derivada sob uma estrutura de hipóteses mais fraca. Operacionalmente, a DN de máxima entropia é aquela que resolve o seguinte programa:

$$\max_f h(f) := \max_f \left(- \int_0^\infty f_T(x) \log f_T(x) dx \right),$$

sujeito a f ser uma função de densidade de probabilidade, e avaliar corretamente (com relação aos preços de mercado) o ativo subjacente e todas as outras opções dependentes desse ativo.

4.2. Minimização da entropia relativa (MER)

A medida de entropia apresentada pode ser generalizada pelo conceito de Entropia Relativa ou Divergência Direcionada de Kullback-Leibler. A densidade neutralizadora $f_T^Q = f_T$ é escolhida de forma a minimizar a divergência, no sentido informacional, com relação a uma dada distribuição prévia, a p_T . Matematicamente:

$$\min_f D(f, p) := \min_f \left(\int_0^\infty f_T(x) \log \left(\frac{f_T(x)}{p_T(x)} \right) dx \right),$$

sujeito a f ser uma densidade de probabilidade, e avaliar corretamente (com relação aos preços de mercado) o ativo subjacente e as opções com diferentes preços de exercício e mesma data de exercício que não foram utilizadas na otimização.

A minimização da divergência $D(f, p)$ pode ser entendida com uma generalização do critério de máxima entropia. Esse último critério é equivalente à minimização da divergência com relação a uma distribuição prévia uniformemente distribuída. No entanto,

de forma geral p_T é uma distribuição prévia com características desejáveis, cuja distância relativa se quer minimizar⁽¹⁰⁾.

Stutzer (1996) utiliza-se da densidade empírica (histograma) dos retornos históricos como densidade da distribuição prévia p_T na minimização da divergência de Kullback-Leibler. A formulação de Stutzer tem a vantagem de propiciar, diretamente, a comparação entre a densidade histórica dos retornos do ativo subjacente e a DN. A partir da relação entre as duas, pode-se estimar o coeficiente de aversão ao risco de Arrow-Pratt implícita do mercado, como mostram Ait-Sahalia & Lo (2000) e Jackwerth (1999). Entretanto, Stutzer (1996) não leva em consideração alguns fatos estilizados de retornos financeiros, como volatilidades condicionadas e com reversão à média, na determinação de uma distribuição prévia adequada.

Na linha da análise bayesiana, o desejável seria que a minimização da divergência de Kullback-Leibler fosse feita com relação a uma distribuição prévia com características economicamente desejáveis. Um dos maiores problemas encontrados na literatura sobre modelos implícitos é a constante presença de características sem uma satisfatória explicação econômica. A presença de bimodalidade nas DN's talvez seja uma das mais frequentes. Essa característica, comum em vários trabalhos empíricos, parece ser melhor explicada pelo uso de métodos inadequados do que por alguma característica na formação das expectativas pelos participantes do mercado. De outra forma, se a bimodalidade fosse realmente uma característica das DN's, o mercado estaria errando sistematicamente na formação de suas expectativas, o que iria contra a hipótese de eficiência do mercado/máxima entropia.

4.3. Minimização da entropia relativa local (MERL)

Uma alternativa para a estimação da DN que não depende da especificação de uma distribuição prévia (baseada nos preços históricos ou não) foi proposta por Edelman (2001).

Edelman (2001) parte do trabalho de Jackwerth & Rubinstein (1996) que apresentam um estudo comparativo de diversas formas de estimação da DN baseadas na minimização de alguma função-perda. Os autores argumentam a favor do modelo chamado de Máxima Suavidade por suas características empíricas, corrigindo um problema comum às demais alternativas: soluções pouco suaves.

Na forma contínua, o modelo de Jackwerth & Rubinstein (1996), seleciona a densidade neutralizadora que maximiza sua própria suavidade (MS). Matematicamente, isso implica o seguinte programa:

$$\max_f MS(f) := \max_f \left(\int_0^\infty f''(x)^2 dx \right),$$

sujeito a f ser uma função de densidade de probabilidade, e avaliar corretamente (com relação aos preços de mercado) o ativo subjacente e as opções com diferentes preços de exercício e mesma data de exercício que não foram utilizadas na otimização.

Edelman (2001) formulou um modelo que concilia o *insight* empírico de Jackwerth & Rubinstein (1996) e o princípio de Mínima Entropia Relativa. No modelo proposto, a DN resultante é aquela que minimiza a entropia relativa com relação a uma versão suavizada dela própria: f_ϵ . Nesse caso, pode-se mostrar que, a partir da medida de divergência de Kullback-Leibler,

$$D(f, f_\epsilon) := \int_0^\infty f(x) \log \left(\frac{f(x)}{f_\epsilon(x)} \right) dx,$$

com $\epsilon > 0$ pequeno, a função-objetivo de MERL será governada por:

$$\min_f D_\epsilon(f) := \min_f \left(\int_0^\infty \frac{f''(x)^2}{f(x)} dx \right).$$

A metodologia de Edelman (2001) apresenta desejáveis características empíricas, mas a escolha da distribuição prévia como uma versão suavizada da própria DN, à la Jackwerth e Rubinstein, ainda demanda melhor justificação econômica.

5. IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

Foram implementados os modelos Máxima Suavidade (MS), Máxima Entropia (ME), Mínima Entropia Relativa (MER) e Mínima Entropia Relativa Local (MERL), segundo as descrições expostas na seção anterior. A implementação dos modelos foi feita a partir de formas discretas das funções-objetivo.

Para o modelo de MS tem-se:

$$F_{MS} = \sum_i (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2.$$

Para o modelo ME:

$$F_{ME} = \sum_i f_i \log f_i.$$

Para o modelo MER:

$$F_{MER} = \sum_i f_i \log \frac{f_i}{p_i}.$$

Finalmente, para o modelo MERL:

$$F_{MERL} = \sum_i \frac{(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2}{f_i}.$$

As funções foram avaliadas em 32 pontos i discretos, obtidos a partir da DN terminal de uma árvore binomial de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)⁽¹¹⁾. As restrições foram incorporadas em uma função-objetivo aumentada (FA), somando a função-objetivo (F) com funções-perda quadráticas ($g(x)$ e $h(x)$), como sugerido por Jackwerth & Rubinstein (1996):

$$FA = F + \alpha \left\{ \max(0, g(x))^2 + h(x)^2 \right\},$$

sendo que $g(x)$ é uma restrição de desigualdade (solução não-negativa em todos os pontos) e $h(x)$ representa as seguintes restrições de igualdade: soma das probabilidades igual a um; avaliar o ativo subjacente com o preço do mercado; e avaliar todas as outras opções disponíveis sobre o mesmo ativo subjacente, com os seus preços de mercado, que não foram utilizadas na otimização. O valor do parâmetro de penalização usado foi 10^2 . Em todos os modelos, esse valor gerou violações das restrições menores que um centavo. Se desejado, esse parâmetro pode ser usado para aumentar ainda mais a precisão do modelo no cumprimento das restrições impostas.

6. UMA ILUSTRAÇÃO DOS MÉTODOS

Como forma de ilustrar os procedimentos aplicados aos dados do mercado brasileiro, estimou-se a DN para as opções apresentadas na figura 1.

O *smile* da figura 1 representa os preços de mercado das opções de compra sobre a Telemar PN negociados na Bovespa em 20 de junho de 2001. Os preços foram cotados durante o pregão, de maneira que estavam sincronizados com o preço no mercado à vista⁽¹²⁾.

O valor do ativo subjacente era de R\$ 36,20, as opções estavam a 43 dias úteis do vencimento e a taxa de juros (sob capitalização contínua) para o prazo de 43 dias era de 17,58% ao ano pela curva dos Futuros de Depósitos Interbancários de Reserva (DI) da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

Os modelos aqui apresentados podem ser calibrados para reproduzir, exatamente, a estrutura de preços vigente no mercado. Na figura 2 constam as DNs estimadas para cada um dos quatro modelos (linha cheia) e, para comparação, a densidade terminal de uma árvore binomial CRR (linha pontilhada).

O resultado mostra que a DN estimada pelo PME apresenta pronunciada assimetria negativa, com uma cauda inferior bem mais pesada do que a da densidade binomial. Com relação às densidades pelos outros três métodos, todas apresentam alguma assimetria negativa e razoável suavidade.

Vale lembrar que, apesar de diferentes, as quatro densidades avaliam todo o conjunto das opções não utilizadas na otimização e o ativo subjacente de maneira idêntica ao mercado, uma vez que essa é uma restrição da otimização.

O mesmo procedimento foi executado para o dia 16 de julho de 2001. O *smile* de VIs desse dia pode ser visto na figura 3. Pode-se perceber que, relativamente ao *smile* do dia 20 de ju-

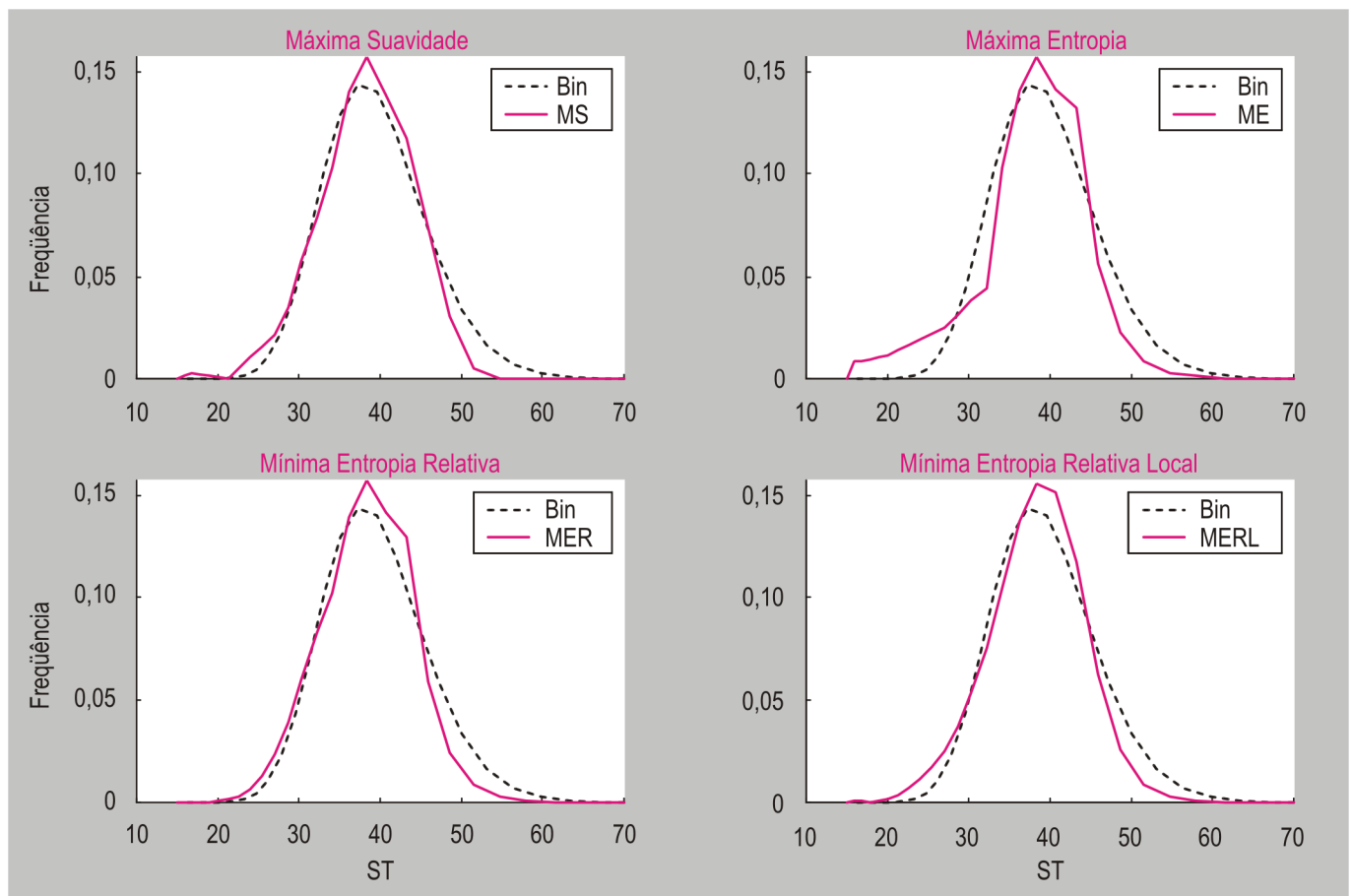


Figura 2: Densidades Neutralizadoras (20/junho/2001)

no, houve elevação da volatilidade implícita para opções com maior preço de exercício, apesar de a opção com preço de exercício de R\$ 32,00 quase não ter mudado de VI.

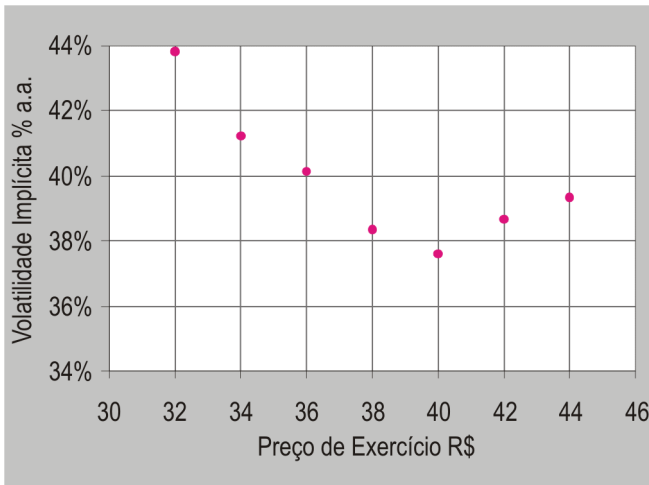


Figura 3: Smile de Volatilidades Implícitas (16/ julho/ 2001)

Podem ser observados alguns resultados interessantes das densidades estimadas na figura 4. Primeiramente, o modelo de Máxima Suavidade apresentou uma (pequena) segunda moda na cauda inferior. Jackwerth & Rubinstein (1996) já alertavam para esse problema no seu procedimento. Além disso, a densidade não se mostrou suave ao redor da média. O mesmo problema, mas em maior intensidade, ocorreu na estimação dos modelos ME e MER. Para vários dos outros dias entre essas duas datas a falta de suavidade nesses dois modelos foi relevante.

Por fim, o critério de Edelman de Mínima Entropia Relativa Local mostrou-se bastante robusto. Como mostra a figura, o critério gerou densidade bastante suave e **crível**. Para todos os outros dias testados, o resultado do modelo mostrou-se unimodal e bastante suave.

7. CONCLUSÃO

Como foi mostrado, a Teoria da Informação oferece ferramentas adequadas para a estimação da DN. O procedimento sugerido por Edelman (2001) mostrou-se bastante robusto nas aplicações, resultando em DNs suaves. No entanto, esse pro-

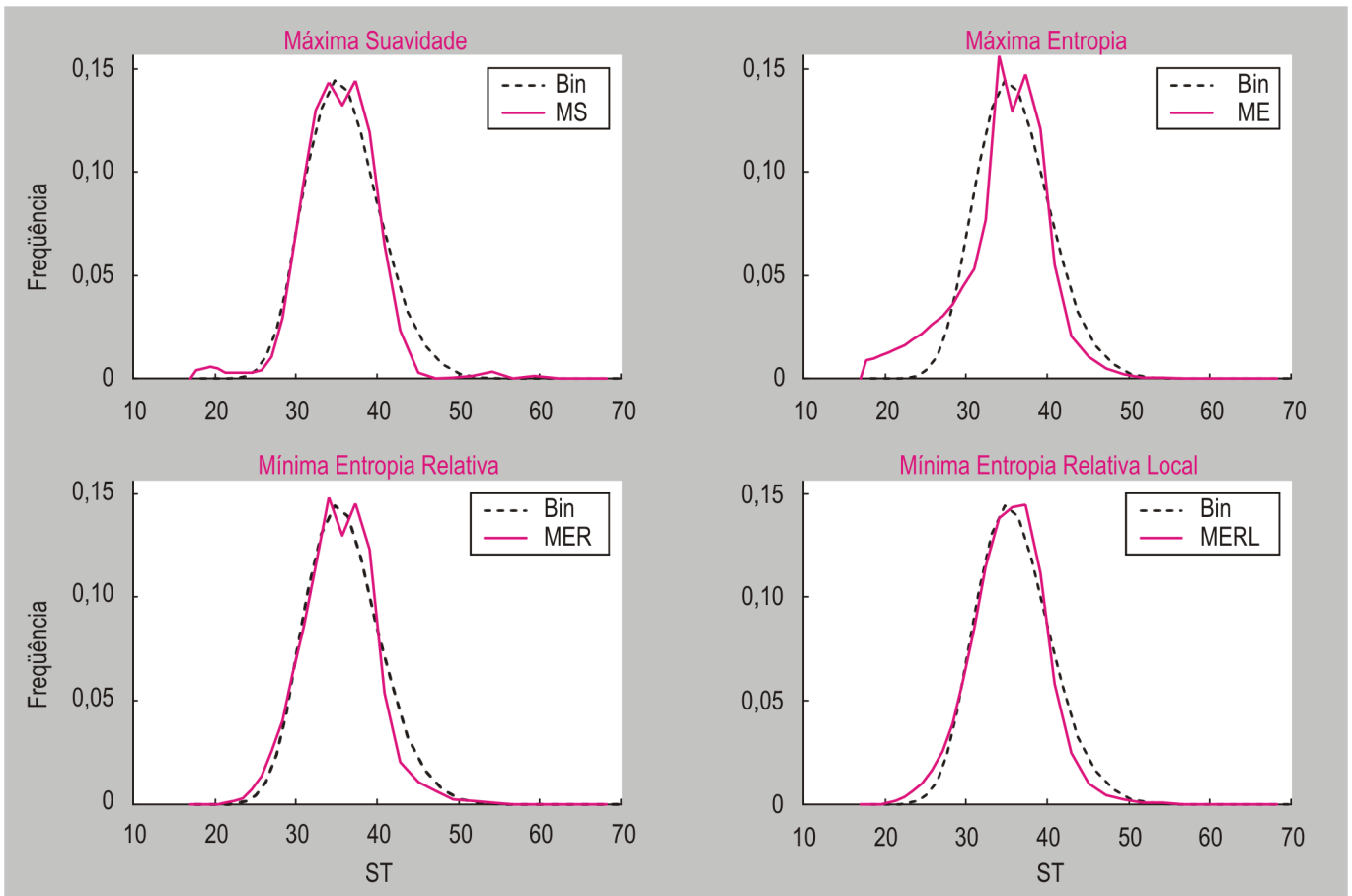


Figura 4: Densidades Neutralizadoras (16/julho/2001)

cedimento não apresenta, ainda, uma interpretação econômica satisfatória, além de não estabelecer relação direta com a distribuição empírica dos retornos. Uma possível extensão desses

métodos poderia seguir por essa linha, fundamentando os modelos e estabelecendo a relação entre a DN e a densidade histórica dos retornos. ◆

NOTAS

- (1) Sob a medida subjetiva do mercado, os preços descontados normalmente são sub-*martingales*, ou seja, apresentam *drift* positivo.
- (2) A condição de NFLVR é similar à de Não-Arbitragem e assegura a existência de uma DN nesse contexto mais geral. Essa implicação é conhecida como Teorema Fundamental do Apreçamento de Ativos. O artigo de Delbaen & Schachermayer (1994) é um dos trabalhos básicos no contexto contínuo.
- (3) Essa densidade é denominada Densidade Neutralizadora do Preço da Incerteza (DN).
- (4) Em princípio, pode-se calcular a VI por outro modelo, mas, neste artigo, usar-se-á o termo volatilidade implícita sempre com relação ao modelo B-S-M.
- (5) A volatilidade utilizada foi a média ponderada das volatilidades implícitas pelo vega de cada opção.
- (6) Há várias explicações na literatura para a presença do *smile* de volatilidade e , conseqüentemente, dos fatos estilizados da DN de opções sobre ações ou índices. Uma explicação, devida a Rubinstein (1994), atribui o maior peso na cauda inferior a uma *crashphobia* por parte dos operadores.
- (7) Essa solução, como as outras formas propostas de estimação da DN, necessita da hipótese de processo markoviano, uma vez que é definida para a distribuição terminal de S_T e não para o processo estocástico S .
- (8) Note-se que há uma mudança de foco nas duas abordagens. Enquanto a HME é caracterizada sobre os preços do mercado, a hipótese de Máxima Entropia expressa a mesma idéia em termos de um consenso de expectativas. Dessa forma, trabalha com a equivalência entre preços plenamente informativos e expectativas completamente ignorantes.
- (9) Vale notar que o critério de Máxima Entropia, assim como cada um dos critérios de estimação da DN propostos na literatura, implica a suposição de uma função de utilidade específica. A escolha de um desses critérios corresponde, indiretamente, à escolha de uma função de utilidade.
- (10) A máxima entropia é o caso particular em que não existe informação prévia sobre o formato desejável para a DN. Por isso, esse critério atende às restrições de maneira a divergir o mínimo possível da distribuição uniforme, aquela totalmente desprovida de informação. Como será mostrado, esse critério resulta em soluções empíricas consideravelmente distintas daquelas encontradas pelo critério de mínima entropia relativa, apesar da proximidade conceitual.
- (11) Como mostrado em Wilmott, Howison & Dewynne (1997), uma árvore binomial de 32 pontos já tem suficiente acurácia na avaliação de opções para prazos de até um ano para o vencimento.
- (12) Os dados de opções foram coletados com a restrição de um descasamento menor que dois minutos entre suas últimas cotações e a última cotação do ativo subjacente no mercado à vista.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AÏT-SAHALIA, Y.; LO, A. Nonparametric risk management and implied risk aversion. *The Journal of Econometrics*, v.94, p.9-51, 2000.
- AVELLANEDA, M.; FRIEDMAN, C.; HOLMES, R.; SAMPERI, D. Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization. *Applied Mathematical Finance*, v.6, p.1-18, 1997.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v.81, p.637-659, 1973.
- BUCHEN, P.W.; KELLY, M. The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.31, n.1, p.143-157, 1996.
- COVER, T.M.; THOMAS, J.A. *Elements of information theory*. New York: John Wiley, 1991.
- DELBAEN, F.; SCHACHERMAYER, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, v.300, p.463-520, 1994.

- EDELMAN, D. *The maximum local cross-entropy criterion for inferring risk-neutral price distributions from traded options prices*. Working Paper. University of Wollongong, Australia, 2001.
- GULKO, L. The entropic market hypothesis. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v.2, p.293-329, 1999a.
- _____. The entropy theory of stock option pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v.2, p.331-355, 1999b.
- JACKWERTH, J.C. Option-implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: a literature review. *The Journal of Derivatives*, v.2, p.66-82, 1999.
- JACKWERTH, J.; RUBINSTEIN, M. Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance*, v.5, p.1611-1631, 1996.
- OLIVEIRA, G.A.; SILVA, M.E. Modelos de estimação da densidade neutra ao risco implícita em preços de opções. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMETRIA, 22., 2000, Campinas - SP. *Anais...* São Paulo, 2000. V. II, 20 p.
- RUBINSTEIN, M. Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, v.3, p.771-818, 1994.
- RUBINSTEIN, M. Edgeworth binomial trees. *The Journal of Derivatives*, v.3, p.20-27, 1998.
- SIQUEIRA, J. de Oliveira. *Determinação entrópica do preço racional da opção européia simples ordinária sobre ação e bond: uma aplicação da teoria da informação em finanças em condição de incerteza*. 1999. Tese (Doutorado) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil.
- _____. *Econometria entrópico-bayesiana: do preço ao valor de mercado*. 2001. Tese (Livre-Docência) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil. [Em preparação.]
- STUART, A.; ORD, S. *Kendall's advanced theory of statistics*. New York: Oxford University Press, 1989.
- STUTZER, M. A simple nonparametric approach to derivative security valuation. *The Journal of Finance*, v.5, n.4, p.1633-1652, 1996.
- _____. Simple entropic derivation of a generalized Black-Scholes option pricing model. *Entropy*, v.2, p.70-77, 2000.
- WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

The minimum local relative entropy principle applied in option pricing

In this article the recent applications of the tools of the Information Theory are presented, in the estimation of the Neutralizing Density of the Uncertainty Price. The principles of Maximum Entropy, of Minimum Relative Entropy and, finally, the principle of Minimum Local Relative Entropy proposed recently by Edelman (2001) are discussed. The models are estimated for data of the Brazilian market of options and compared to an alternative previously proposed in the literature by Jackwerth & Rubinstein (1996). In the presented example, the model of Edelman shows itself to be quite robust and with theoretical characteristics and practices superior to the other implemented models.

Uniterms: risk-neutral distribution function, relative entropy, option pricing, derivative.

El principio de la mínima entropía relativa local en la apreciación de opción

En este artículo se presentan las recientes aplicaciones de las herramientas de la Teoría de la Información en la estimación de la Densidad Neutralizadora del Precio de la Incertidumbre (DN). Se discuten los principios de Máxima Entropía, de Mínima Entropía Relativa y, finalmente, el principio de Mínima Entropía Relativa Local, planteado recientemente por Edelman (2001). Se estiman los modelos para datos del mercado brasileño de opciones y se comparan con una alternativa anteriormente propuesta en la literatura por Jackwerth & Rubinstein (1996). En el ejemplo presentado, el modelo de Edelman se muestra bastante fuerte y con características teóricas y prácticas superiores a las de los otros modelos aplicados.

Palabras clave: función de densidad neutralizadora del precio de la incertidumbre, entropía relativa, apreciación de opción, derivativo.