
Desvendando o cálculo da TIR

Oscar Fernando Osorio Balarine

RESUMO

A solução tradicional de problemas de análise de investimentos em projetos com a adoção do método da Taxa Interna de Retorno (TIR) ocorre com o emprego direto de sistemas disponíveis em calculadoras financeiras ou em planilhas eletrônicas, sem o cuidado de se verificar o conhecimento que existe por trás desses cálculos. Revisando os conceitos e processos matemáticos desses cálculos, o presente artigo visa oferecer melhor informação a analistas de projetos que, muitas vezes, empregam o método da TIR sem dominar tal conhecimento.

Recebido em 01/fevereiro/2002
Aprovado em 27/maio/2002

Palavras-chave: taxa interna de retorno, análise de projetos, matemática.

1. INTRODUÇÃO

Em uma passagem do Eclesiastes está registrada frase que deveria ser lembrada por todo acadêmico: “O que foi, será, o que se fez, se tornará a fazer: nada há de novo debaixo do sol” (Ecl. 1, 9). Em outras palavras, idéias originam-se de idéias anteriores, com os registros científicos proporcionando fontes contínuas de inspiração para compreensões mais precisas da natureza. Nesse sentido, resgatar um pouco da história da Matemática pode criar elos entre descobertas sequenciais da humanidade, auxiliando a compreender algumas técnicas que passaram a ser empregadas automaticamente no cotidiano de muitos, com desprezo aos raciocínios exigidos por procedimentos que se tornaram mecânicos.

Assim, neste artigo se propõe captar passagens evolutivas da Matemática, para recuperar conceitos básicos que dão suporte a uma técnica largamente empregada em Análise de Investimentos, mas cujo cálculo é pouco compreendido: a Taxa Interna de Retorno (TIR).

De onde provêm os raciocínios que estão por trás da TIR? Quais cálculos são realizados por máquinas financeiras, como a HP-12C, ou por planilhas eletrônicas, tipo MS-EXCEL, que, como por milagre, geram aquele número mágico? Aspirando responder a essas questões, retorna-se aos filósofos pré-socráticos, passando pelas origens do cálculo diferencial, fundamentando a série de raciocínios que terminaram por derivar a aplicação da Taxa Interna de

Oscar Fernando Osorio Balarine, Doutor em Engenharia de Produção, é Professor e Pesquisador da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil.
E-mail: balarine@pucrs.br

Retorno no mundo dos negócios. Encerra-se o artigo com a apresentação de exemplo, no qual os conceitos revistos são aplicados, passo a passo, no cálculo da TIR de um projeto padrão de investimentos.

2. TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR)

Também conhecida como *Internal Rate of Return* (IRR), a TIR corresponde ao cálculo daquela taxa de desconto que, aplicada a uma série de entradas e saídas de caixa, iguala o fluxo a zero. Em outras palavras, é aquela taxa que zera o Valor Presente Líquido (VPL) (BALARINE, 2002, p.27):

$$VPL = \sum_{t=0}^n R_t / (1+i)^t - \sum_{t=0}^n |C_t| / (1+i)^t = 0 \quad [1]$$

Sendo:

- R_t = Receitas líquidas em cada momento t do projeto;
- C_t = Custos líquidos, em módulo, em cada momento t do projeto;
- $t = 0, 1, 2, \dots, n$;
- $i = \text{TIR}$.

Segundo Faro (1979, p.26), a determinação da TIR é trabalhosa, pois consiste na resolução de um polinômio de grau n . Atualmente esse cálculo foi bastante facilitado pelo advento de máquinas financeiras, bem como pela disponibilização da função TIR em microcomputadores, por meio de planilhas eletrônicas tipo MS-EXCEL. Supõe-se que os sistemas residentes nessas máquinas adotem o Método de Newton-Raphson para tais soluções (o método será visto no tópico 3 e objeto de demonstração aplicada no exemplo 3).

Ainda que o cálculo da TIR exponha alguns inconvenientes, como registrado por Gitman (2001, p.310), representados pela geração de inúmeras taxas se houver inúmeras inversões de sinais nos fluxos (padrão não-convencional de fluxos de caixa), o método é largamente utilizado para avaliação de alternativas de investimentos.

Uma justificativa razoável para essa preferência pode ser associada à verificação de que, em sistemas de financiamento tradicionais, é comum os fluxos apresentarem apenas uma inversão no sinal associado aos movimentos, caracterizando-os como fluxos de caixa convencionais. Em outras palavras, os fluxos costumam registrar uma saída de caixa no início do projeto ($t = 0$), seguida de ingressos em cada momento do tempo futuro ($t = 1; t = 2; \dots; t = n$). Tal particularidade torna exequível o emprego da TIR, sem a necessidade de identificação prévia da taxa de desconto utilizável, como exigido pelo método VPL.

Contudo, apesar da comprovada preferência, é fácil verificar o desconhecimento da mecânica de cálculo da TIR por seus usuários, mesmo entre aqueles portadores de boa formação acadêmica. Pergunte-se como é realizado esse cálculo para especialistas que adotam o método e não será surpresa observar que muitos possuem apenas uma vaga idéia da matemática

empregada. Em certo sentido, esse desconhecimento da função TIR lembra aquelas situações em que alunos memorizam fórmulas, passando a empregá-las na prática, sem domínio de seu significado ou justificativa.

Assim, pretendendo divulgar a verdadeira expressão da TIR, no tópico a seguir será descrita a evolução dos cálculos aplicáveis, julgando-se, com isso, permitir melhor compreensão desse potente instrumento de tomada de decisão.

3. EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA EMPREGADA PARA O CÁLCULO DA TIR

Como indicado anteriormente, o cálculo da Taxa Interna de Retorno pode adotar o Método de Newton-Raphson em sua formulação. Para melhor compreensão dessa técnica é necessário, no entanto, voltar ao passado, identificando cada avanço metodológico que permitiu sua solidificação. Assim, inicia-se a explanação retornando aos filósofos pré-socráticos Zeno e Pitágoras, passando-se pela evolução da geometria analítica e do cálculo diferencial, até chegar ao método gerador da TIR.

3.1. O paradoxo de Zeno

Zeno (ou Zenão, de Eléia) propôs, em 490 a.C., o seguinte paradoxo⁽¹⁾: se alguém está posicionado junto a uma parede numa sala (ponto zero) e deseja chegar à parede oposta (ponto um), deverá caminhar a metade do caminho; posteriormente, a metade da metade; depois, a metade da metade da metade; e assim sucessivamente. Em outras palavras, a pessoa nunca irá alcançar a outra parede! Veja-se a figura 1 e alguns cálculos associados:

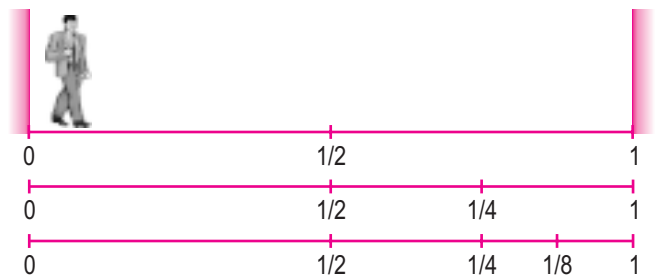


Figura 1: O Paradoxo de Zeno

Fonte: Adaptada de Berlinski (1997, p.123).

Alguns cálculos podem ilustrar o paradoxo:

$$S_1 = 1/2 = 0,5$$

$$S_2 = 1/2 + 1/4 = 0,75$$

$$S_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 0,875$$

$$\dots$$

$$S_{16} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^{16} = 0,99998474$$

... e assim, sucessivamente, de tal forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I$$

Verifica-se que Zeno propôs um sofisma contemplando o conceito de que “toda soma de números reais positivos tende para o infinito”, numa época em que não era conhecido o conceito de limites! Por outro lado, convém destacar que Zeno não afirmou que não se poderia alcançar um fim em um tempo finito. Afirmou, isso sim, que é impossível efetuar número infinito de atos.

Até hoje, o paradoxo de Zeno continua assombrando muitos. Os Matemáticos, por sua vez, para superar a limitação representada pela soma infinita contida no paradoxo, adotaram o conceito de que, no limite da soma (no infinito), a soma transfere-se para seu limite (BERLINSKI, 1997, p.124). Importa destacar que, muitos séculos após, as especulações filosóficas de Zeno terminaram por conduzir à descoberta do cálculo diferencial, por meio da evolução do conceito de limites.

3.2. O teorema de Pitágoras

Outro avanço extraordinário no conhecimento da humanidade está representado pelo teorema⁽²⁾ do filósofo e matemático grego Pitágoras (STRATHERN, 1998), a respeito de quem, segundo Heisenberg (1999, p.99), Bertrand Russell teria afirmado: “Não sei de nenhum outro homem que tenha sido tão influente na esfera do pensamento”. Também Kosko (1994, p.163) destaca relação importante, ao afirmar que “... onde existe Matemática, existe Geometria”. A frase poderia ser complementada por: ... e onde existe Geometria, existe uma **pitada** de Pitágoras⁽³⁾.

Hoje, a demonstração do conhecido teorema apresenta dezenas de provas. Duas figuras (2 e 3), no entanto, são mostradas a seguir, pela elegância de sua harmonia.

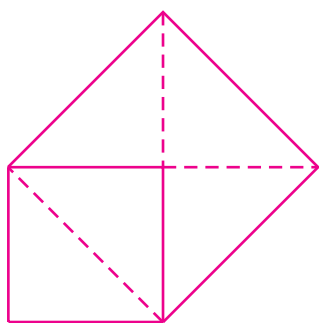


Figura 2: Origem Provável do Teorema de Pitágoras

Fonte: Dewdney (2000, p.36)

A figura 2, registrada por Dewdney (2000, p.36), sugere a origem das idéias que confluíram no teorema, em que um quadrado maior (com lado igual à diagonal do menor) pode ser dividido em quatro triângulos retângulos, que representam o

dobro do número de triângulos em que está dividido o quadrado menor.

A figura 3, constante do Apêndice 1 do livro de Singh (1998), serve como chave para uma das mais belas demonstrações do Teorema de Pitágoras, comprovando que a relação $x^2 + y^2 = z^2$ é verdadeira para todos os triângulos retângulos. A demonstração parte da constatação de que a área do quadrado grande, de lado $x + y$, é igual à área do quadrado pequeno somada a quatro vezes a área do triângulo retângulo de catetos x e y .

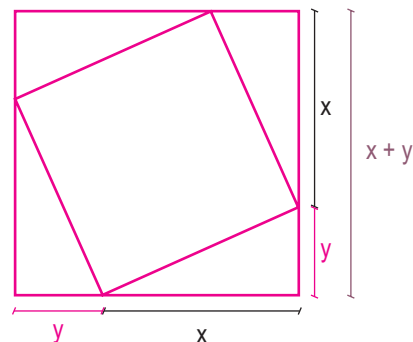


Figura 3: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte: Singh (1998, p.291)

3.3. A geometria analítica

Dando um salto no tempo, agora serão revistos conceitos de dois outros expoentes do conhecimento humano que, durante o Século XVII, alicerçaram os fundamentos que permitiriam, mais adiante, o surgimento do cálculo diferencial. Trata-se de Fermat⁽⁴⁾ e Descartes⁽⁵⁾, cujos estudos originariam a Geometria Analítica.

Na primeira metade do Século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), independente e simultaneamente, solidificaram o que se conhece por Geometria Analítica ao relacionarem propriedades geométricas com equações algébricas, vinculando aritmética e geometria.

A idéia básica da Geometria Analítica partiu da necessidade de caracterizar-se cada ponto no plano, por suas distâncias — x e y — em relação a dois eixos de coordenadas, verificando o relacionamento entre x e y quando o ponto se encontra sobre diferentes tipos de linhas geométricas. A figura 4 mostra um ponto $P(x; y)$ que se relaciona por meio da equação $Ax + By + C = 0$, onde A , B e C são constantes características da reta desenhada no que passou a ser conhecido como Plano Cartesiano.

Quando o ponto $P(x; y)$ se encontra sobre uma circunferência (figura 5), a equação que relaciona x e y é $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras), onde a e b são as coordenadas do centro e r é o raio da circunferência.

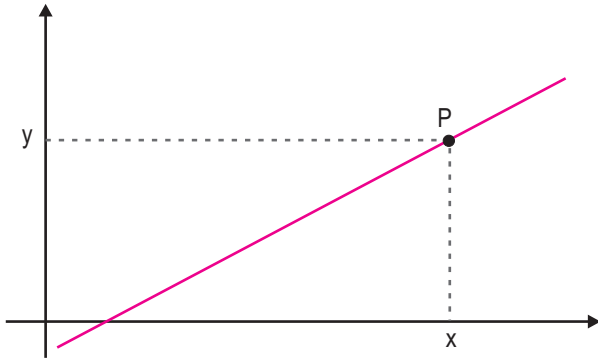


Figura 4: Posicionamento de Um Ponto P Sobre Uma Ret

Fonte: Leithold (1982, p.14)

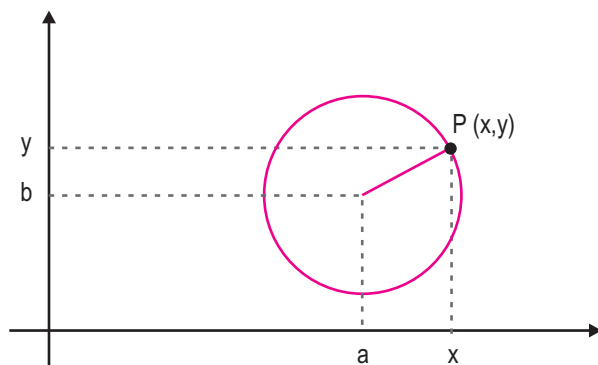


Figura 5: Posicionamento de Um Ponto P Sobre Uma Circunferência

Fonte: Leithold (1982, p.31)

Da mesma forma que as retas e circunferências, também as parábolas, elipses, hipérbolas e uma infinidade de tipos de curvas podem ser tratadas por meio de equações.

3.4. Fermat e o estudo das tangências

Partindo da noção intuitiva de que uma reta r , tangente a uma curva C , passa por um único ponto de contato P entre r e C , Fermat associou conceitos da Geometria Analítica aos de tangência e limites (Zeno), realizando operações com equações representativas das diversas curvas possíveis. Fermat considerou que, ao traçar uma reta tangente a determinada curva que passe por um ponto P dado, é possível tomar-se outro ponto P' da mesma curva e traçar a secante PP' , como pode ser visto na figura 6.

Posteriormente, vai-se aproximando P' de P , em um processo de aproximações sucessivas (Zeno!), de modo que a secante tenda a transformar-se em uma reta que é a tangente procurada.

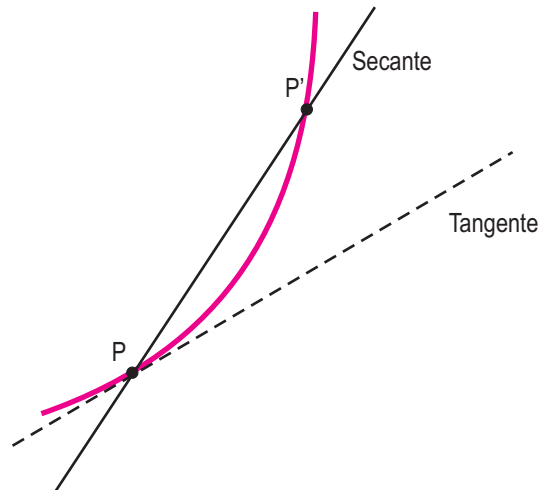


Figura 6: A Secante PP'

Fonte: Salas (1995, p.130)

3.5. O surgimento do cálculo diferencial

Os princípios fundamentais do cálculo surgiram no Século XVII, pelos trabalhos independentes e simultâneos de Isaac Newton e Gottfried Leibniz (ANTON, 2000, p.4).

Partindo do estudo de tangências de Fermat, é possível considerar uma curva qualquer no plano cartesiano, definida por sua equação $y = f(x)$. Na mesma curva, considerem-se dois pontos, $P(x; y)$ e $P'(x + \Delta x; y + \Delta y)$, como pode ser visto na figura 7. A secante PP' forma com o eixo x um ângulo Φ , de modo que: $\text{tg}\Phi = \Delta y/\Delta x$.

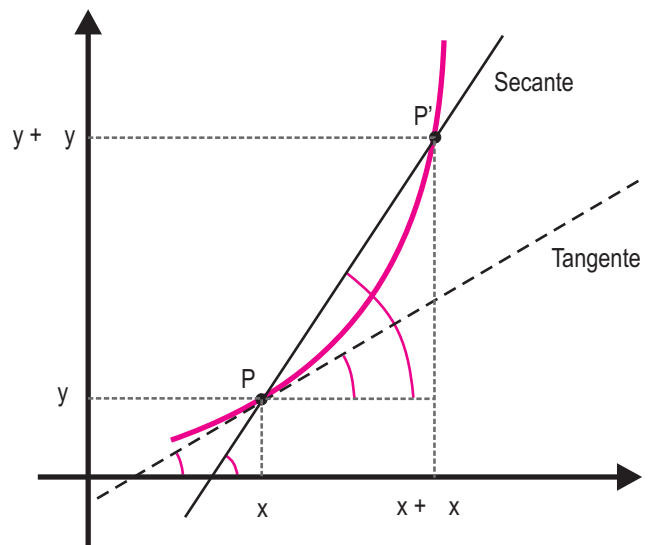


Figura 7: Uma Curva no Plano Cartesiano

Fonte: Salas (1995, p.200)

Conforme Salas (1995), a tangente à curva da função $y = f(x)$ forma com seu eixo o ângulo Θ e este, por sua vez, é o ângulo para o qual tende o anterior, Φ , quando P' tende para P ou, o que é a mesma coisa, quando Δx tende para zero. Ou seja:

$$\operatorname{tg}\Theta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg}\Phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x \quad [2]$$

Em cada ponto da curva existe uma tangente diferente, isto é, para cada valor de x existe um valor de $\operatorname{tg}\Theta$; e cada nova função de x , correspondente à $\operatorname{tg}\Theta$, é denominada **função derivada** da função $y = f(x)$, sendo representada por $dy/dx^{(6)}$, y' ou $f'(x)$.

Os valores Δx e Δy são, respectivamente, as diferenças das abscissas e das ordenadas dos pontos P' e P , sendo que a relação $\Delta y / \Delta x$ é chamada de **coeficiente diferencial**.

Surgiram, a partir desses conceitos, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, com suas inúmeras aplicações na Física e na Engenharia.

Complementarmente aos conceitos de funções derivadas, foram demonstradas inúmeras regras práticas para derivar funções, deduzindo-se fórmulas que facilitam o cálculo. As fórmulas de algumas técnicas de diferenciação (ANTON, 2000, p.189-197) são lembradas a seguir, já que serão utilizadas nos exemplos abordados adiante.

$$\text{Função constante: } y = K \Rightarrow y' = 0 \quad [3]$$

$$\text{Função identidade: } y = x \Rightarrow y' = 1 \quad [4]$$

$$\text{Potência de função: } y = ax^n \Rightarrow y' = nax^{n-1} \quad [5]$$

3.6. O método de Newton-Raphson

Com base nos conceitos vistos, pode-se agora melhor compreender o método desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727), utilizado para calcular as raízes reais de qualquer função. Em 1690, o método foi simplificado pelo matemático Joseph Raphson (1648-1715), passando a ser conhecido como **Método de Newton-Raphson**.

O Método de Newton-Raphson (SALAS, 1995, p.202-205; GARBI, 1997, p.76-97) emprega a chamada **fórmula de recorrência**, sendo utilizado para calcular raízes reais de funções do tipo $y = f(x)$.

Ainda que apresente algumas limitações (somente pode ser aplicado a raízes reais; e, em determinadas circunstâncias, a seqüência $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ não é convergente, ou seja, os valores de x_n não tendem a um valor definido), o método é aplicável à Engenharia Econômica, particularmente quanto ao cálculo das raízes de uma equação especial. Trata-se de encontrar as raízes da equação $f(x) = 0$, pois elas representam aqueles pontos em que o gráfico da função $y = f(x)$ corta o eixo dos x . Nesse ponto, onde $y = 0$, encontra-se o valor da taxa que zera o Valor Presente Líquido. Em outras palavras, é a taxa que corresponde à TIR.

Supondo que se esteja procurando a raiz r_f , conforme gráfico representado pela figura 8, tomando-se o ponto $P_0(x_0; y_0)$ e traçando por ele a tangente 1 à curva, é alcançado o ponto x_1 em que a tangente corta o eixo dos x . Tal ponto é uma aproximação da raiz r_f .

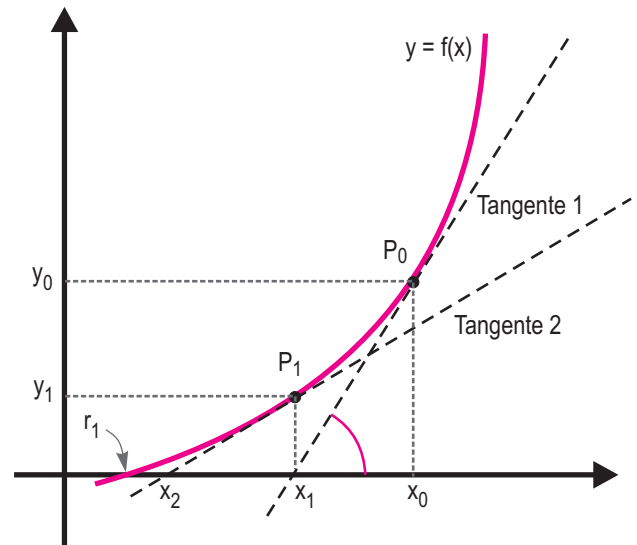


Figura 8: O Método de Newton-Raphson

Fonte: Salas (1995, p.203)

Com base nesse método, podem ser traçadas inúmeras tangentes, que se aproximem cada vez mais de r_f . Por exemplo, pode-se tomar o ponto P_1 , que é definido pelas coordenadas $(x_1; f(x_1))$, ou seja, $(x_1; y_1)$, e traçar-se uma nova tangente 2 a ele, obtendo-se outra aproximação melhor para r_f , que poderá ser chamada de x_2 . Novamente, sobre outro ponto P_2 , de coordenadas $(x_2; f(x_2))$, ou seja, $(x_2; y_2)$, traça-se uma terceira tangente, sendo obtido o valor x_3 , uma nova aproximação da raiz procurada. A repetição do procedimento, quantas vezes for conveniente, irá conduzir rapidamente a aproximações cada vez melhores da raiz procurada. A equação da tangente à curva, quando passa pelo ponto $(x_0; y_0)$, é:

$$\operatorname{tg}\Theta = (y - y_0) / (x - x_0) \quad [6]$$

Como essa reta cruza o eixo dos x no ponto $(x_1; 0)$, obtém-se: $\operatorname{tg}\Theta = (0 - y_0) / (x_1 - x_0)$. Simplificando a equação, é obtido: $-y_0 = x_1 \operatorname{tg}\Theta - x_0 \operatorname{tg}\Theta$. Então, para isolar x_1 obtém-se, por meio da divisão de ambos os lados por $\operatorname{tg}\Theta$: $-y_0 / \operatorname{tg}\Theta = x_1 - x_0$. E, simplificando, $x_1 = x_0 - y_0 / \operatorname{tg}\Theta$. Como já é de conhecimento que $\operatorname{tg}\Theta = f'(x_0)$, e que $y_0 = f(x_0)$, obtém-se:

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) \quad [7]$$

Essa é uma equação pertencente à família das chamadas **fórmulas de recorrência**, assim identificadas por permitirem

recorrer-se a elas infinitas vezes, até ser alcançada uma aproximação tal da raiz r_1 procurada que satisfaça o analista.

Assim, dada uma função f qualquer, calcula-se sua derivada f' e, após, toma-se x_0 como ponto de partida para calcular x_1 . Posteriormente, partindo de x_1 , e utilizando a mesma fórmula (recorrência!), calcula-se x_2 . Ou seja, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, e assim, sucessivamente: $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$; ...; $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$.

4. APLICAÇÕES DAS FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

Com base no conhecimento das fórmulas de recorrência, podem ser tomados, agora, alguns exemplos da potência do método, conhecidas as funções f (exemplos 1 e 2). Após, será desenvolvido exercício típico da área da Engenharia Econômica para, desconhecida a função f específica, identificar sua equação e, então, utilizando as fórmulas de recorrência, calcular a TIR (exemplo 3).

Exemplo 1

Diz respeito ao cálculo do valor de x , dada a equação: $x^{10} = 5$.

A equação pode ser transformada para $x^{10} - 5 = 0$, ou seja: $f(x) = x^{10} - 5$. Derivando $f(x)$, obtém-se: $f'(x) = 10x^9$ (vide fórmulas [3] e [5]). Pode-se perceber que o número procurado está localizado entre 1 e 2, pois $1^{10} = 1$ ($1 < 5$) e $2^{10} = 1.024$ ($1.024 > 5$). Então, pode-se tomar como partida para a utilização da fórmula de recorrência um valor médio para x , no caso $x_0 = 1,5$. Aplicando a fórmula [5], obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5 - [(1,5)^{10} - 5] / 10(1,5)^9 = 1,363.006.147 \\ x_2 &= 1,363.006.147 - [(1,363.006.147)^{10} - 5] / \\ &\quad 10(1,363.006.147)^9 = 1,257.501.204 \\ x_3 &= 1,257.501.204 - [(1,257.501.204)^{10} - 5] / \\ &\quad 10(1,257.501.204)^9 = 1,195.341.888 \\ x_4 &= 1,195.341.888 - [(1,195.341.888)^{10} - 5] / \\ &\quad 10(1,195.341.888)^9 = 1,176.163.102 \\ x_5 &= 1,176.163.102 - [(1,176.163.102)^{10} - 5] / \\ &\quad 10(1,176.163.102)^9 = 1,174.628.034 \\ x_6 &= 1,174.628.034 - [(1,174.628.034)^{10} - 5] / \\ &\quad 10(1,174.628.034)^9 = 1,174.618.943 \end{aligned}$$

Dando-se por satisfeito após seis ciclos, o analista poderá verificar que, com o uso de uma calculadora científica, o resultado de $^{10}\sqrt{5}$ será 1,174.618.943.

Exemplo 2

Segundo Garbi (1997, p.93), em 1225 d.C. Leonardo Fibonacci (1175-1250) solucionou a seguinte equação de terceiro grau, proposta em uma competição: $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci teria encontrado como resposta: $x = 1,3688081075$.

Para testar o resultado, utilizando as fórmulas de recorrência, o passo inicial deve ser encontrar um ponto de partida conveniente (x_0). Por tentativa e erro, é possível verificar que: $x = 1 \Rightarrow$ resultado da equação = 13 (menor do que 20); e, $x = 2 \Rightarrow$ resultado da equação = 36 (maior do que 20). Portanto, a raiz está entre 1 e 2. Novamente, como no problema anterior, pode-se iniciar adotando $x_0 = 1,5$.

Parte-se, então, da função: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$
Derivando $f(x)$, obtém-se: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$

Aplicando as fórmulas de recorrência [7], para $x_0 = 1,5$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5 - (3,375 + 4,5 + 15 - 20) / (6,75 + 6 + 10) = 1,5 - \\ &\quad 2,875/22,75 = 1,373626374 \\ x_2 &= 1,373626374 - (2,591826121 + 3,77369883 + \\ &\quad 13,73626374 - 20) / (5,660548245 + 5,494505496 + 10) \\ x_2 &= 1,373626374 - (0,10178869) / (21,15505374) = \\ &\quad 1,368814820 \\ x_3 &= 1,368814820 - (2,564685378 + 3,747308022 + \\ &\quad 13,68814820 - 20) / (5,620962033 + 5,47525928 + 10) \\ x_3 &= 1,368626374 - 0,000141600 / (21,09622131) = \\ &\quad 1,368808108 \end{aligned}$$

Dando-se por satisfeito com três ciclos, o analista poderá verificar que Fibonacci estava certo em 1225 d.C. e, portanto, muito antes do cálculo diferencial ter sido desenvolvido.

Exemplo 3

Finalmente, apresenta-se um exercício de aplicação direta dos conceitos da Engenharia Econômica, com nova dificuldade: é desconhecida a equação definidora da curva.

Seja um projeto simplificado de investimento que apresente o seguinte fluxo de caixa, com os movimentos ocorrendo ao final dos períodos:

Anos	Valores
0	- 100
1	+ 40
2	+ 40
3	+ 40

Pergunta-se: Qual é a Taxa Interna de Retorno (TIR) do projeto?

Com o auxílio de uma calculadora do tipo financeira ou com o uso de planilha eletrônica (MS-EXCEL®, por exemplo), é possível verificar que a TIR é igual a 0,097, ou seja, 9,7% ao ano.

Identifique-se, agora, a TIR com o uso das fórmulas de recorrência, que podem ser adotadas internamente pela calculadora e pela planilha eletrônica.

O primeiro passo será montar uma tabela arbitrária para $y = f(x)$ e plotar seu gráfico, visando identificar uma equação que descreva a curva gerada pela função. Para tanto, é utiliza-

da a formulação do VPL para o cálculo dos diversos valores assumidos por y , para x comportando-se no intervalo entre 5% e 15%, por exemplo. Plotados os pontos $(x; y)$, o gráfico é representado por um ramo de parábola (figura 9).

x	y
0,05	8,929921175
0,06	6,920477978
0,07	4,972641777
0,08	3,083879490
0,09	1,251786640
0,10	-0,525920361
...	...
0,15	-8,670995315

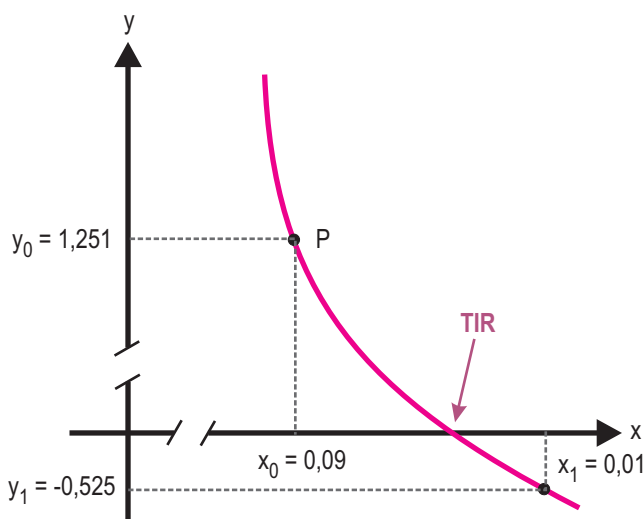


Figura 9: TIR com o Uso das Fórmulas de Recorrência

Pode-se perceber na figura 9 que a taxa procurada $(x; y_0)$ está entre $x = 0,09$ e $x = 0,1$.

Agora, é necessário identificar a equação da curva. Para tanto, tomam-se três pontos, como, por exemplo: $(x_1 = 0,05; y_1 = 8,929921175)$, $(x_2 = 0,06; y_2 = 6,920477978)$ e $(x_3 = 0,07; y_3 = 4,972641777)$.

Verificando, também, que a equação geral da curva é $y = ax^2 + bx + c$, torna-se possível montar o sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} 8,929921175 = [(0,05)^2 a] + (0,05 b) + c \\ 6,920477978 = [(0,06)^2 a] + (0,06 b) + c \\ 4,972641777 = [(0,07)^2 a] + (0,07 b) + c \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} 8,929921175 = 0,0025 a + 0,05 b + c \\ 6,920477978 = 0,0036 a + 0,06 b + c \\ 4,972641777 = 0,0049 a + 0,07 b + c \end{cases}$$

Então, conforme indicado por Kolman (1998, p.54), é possível aplicar a técnica de **Interpolação Polinomial**. Esse autor sugere que, conhecidos n pontos distintos $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$, pode ser encontrado um polinômio de grau maior ou igual a $n-1$ que interpole esses dados, isto é, cujo gráfico contenha esses n pontos. O polinômio será da forma:

$$y = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad [8]$$

Considerando o caso que vem sendo estudado (exemplo 3), em que $n = 3$, conhecidos os pontos $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ e $(x_3; y_3)$, procura-se o polinômio:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad [9]$$

Dados os pontos conhecidos $(0,05; 8,929921175)$, $(0,06; 6,920477978)$ e $(0,07; 4,972641777)$, e substituindo-os na equação [9], obtém-se o sistema linear:

$$\begin{aligned} a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 &= y_1 & \text{onde: } x_1^2 &= 0,05^2 = 0,0025 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 &= y_2 & x_2^2 &= 0,06^2 = 0,0036 \\ a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 &= y_3 & x_3^2 &= 0,07^2 = 0,0049 \end{aligned}$$

que fica:

$$\begin{aligned} 0,0025 a_2 + 0,05 a_1 + a_0 &= 8,929921175 \\ 0,0036 a_2 + 0,06 a_1 + a_0 &= 6,920477978 \\ 0,0049 a_2 + 0,07 a_1 + a_0 &= 4,972641777 \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes desse sistema linear é (KOLMAN, 1998, p.95):

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,05 & 1 \\ 0,0036 & 0,06 & 1 \\ 0,0049 & 0,07 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é o chamado **Determinante de Vandermonde**, que tem o valor:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3) &\Rightarrow \det(A) = \\ (0,06 - 0,05)(0,07 - 0,05)(0,06 - 0,07) &= \\ -0,000002 (\neq 0) & \end{aligned}$$

Como os três pontos são distintos, o Determinante de Vandermonde é diferente de zero. Portanto, a matriz dos coeficientes do sistema linear é revertível, o que implica ter o sistema linear uma única solução. Existe, portanto, um único polinômio quadrático interpolador. Tais constatações levam a concluir que é possível utilizar a **Regra de Cramer** (KOLMAN, 1998, p.93-94).

A Regra de Cramer é utilizada para resolver o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz $n \times n$: se $\det(A) \neq 0$, então para cada i , $x_i = \det(A_i) / \det(A)$, onde A_i é a matriz obtida de A , trocando-se sua i -ésima coluna por b :

$$b = \begin{bmatrix} 8,929921175 \\ 6,920477978 \\ 4,972641777 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,05 & 1 \\ 0,0036 & 0,06 & 1 \\ 0,0049 & 0,07 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante de A é obtido: repetindo as duas primeiras colunas de A ; formando as somas dos produtos dos elementos indicados pelas setas da esquerda para a direita; e subtraindo desse número os produtos dos elementos indicados pelas setas da direita para a esquerda:

$$\det(A) = \begin{array}{cccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array} \quad \det(A) = -0,000002$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 8,929921175 & 0,05 & 1 \\ 6,920477978 & 0,06 & 1 \\ 4,972641777 & 0,07 & 1 \end{vmatrix} / -0,000002 =$$

$$= -0,00061607 / -0,000002 = 308,03498$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 0,0025 & 8,929921175 & 1 \\ 0,0036 & 6,920477978 & 1 \\ 0,0049 & 4,972641777 & 1 \end{vmatrix} / -0,000002 =$$

$$= 0,000469656 / -0,000002 = -234,8281675$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 0,0025 & 0,05 & 8,929921175 \\ 0,0036 & 0,06 & 6,920477978 \\ 0,0049 & 0,07 & 4,972641777 \end{vmatrix} / -0,000002 =$$

$$= -0,0000398024842 / -0,000002 = 19,9012421$$

Conhecidos os três pontos, retorna-se ao polinômio em [9], ou seja, $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Então, igualando y a zero, que é o ponto de corte da curva em x , substituindo os coeficientes pelos valores obtidos, e aplicando a **Fórmula Quadrática** (ANTON, 2000, 1ª Contracapa), obtém-se:

$$0 = 308,03498x^2 - 234,8281675x + 19,9012421$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = 0,665 \quad \text{e} \quad x = 0,097$$

Como já se conhece, antecipadamente, que a raiz procurada está contida entre 0,09 e 0,1, é abandonada a primeira solução ($x = 0,665$), adotando-se a segunda raiz como a procurada ($x = 0,097$), ou seja, 9,7%, que corresponde à TIR.

5. CONCLUSÃO

A ciência, no sentido adotado por Popper (1975), é um conjunto de hipóteses e conclusões delas inferidas, passíveis de confrontação empírica. Portanto, cabe ao investigador "... sa-

ber alguma coisa acerca da história (de uma disciplina) e acerca da lógica da pesquisa..." (Lorde Acton, citado por Popper, 1975), para então fazer uso de sua imaginação, ampliando caminhos e modos de efetuar testes.

Neste artigo, procurou-se extrair alguns tópicos importantes da história da Matemática, para demonstrar os cálculos que existem por trás da aplicação do método da Taxa Interna de Retorno, bastante aplicado em Finanças, mas de origem desconhecida para muitos praticantes.

Partiu-se de duas hipóteses. A primeira, de que, com o advento de sistemas de informação, as pessoas passaram a empregar técnicas automaticamente em seu cotidiano, muitas vezes sem dominar os raciocínios que lhes dão suporte. A segunda, de que o conhecimento detalhado desses raciocínios pode melhor posicionar seus usuários para a tomada de decisão.

Por outro lado, objetivou-se mostrar que, por trás de uma técnica quantitativa de largo uso, existe sólido alicerce baseado em descobertas científicas com expressivo rigor dedutivo, que se encadeiam num crescendo revolucionário.

Verificou-se, pois, que os espíritos de Zeno, Pitágoras e Isaac Newton, entre tantos outros homens de extraordinária sabedoria, continuam influenciando no cotidiano de muitos. Por outro lado, parece confirmado o poder associativo de técnicas de sucesso, contribuindo para a evolução das disciplinas que lhes dão suporte.

Isso implica, por sua vez, em encontrar uma linguagem detalhada e flexível, capaz de descrever a técnica objeto com rigorismo e praticidade.

Nesse sentido, entende-se que a adoção do Método de Newton-Raphson para a geração da TIR, como sugerido neste artigo, aprimora seu cálculo. Note-se que inúmeros autores vêm divulgando a obtenção da Taxa Interna de Retorno por meio de tentativas. Gitman (1984) indica a interpolação como técnica matemática utilizada para se obter a TIR, partindo de uma "anuidade ilusória" (p.447). Também Puccini (1998, p.179-193) sugere o uso da interpolação linear, mesmo admitindo que "... a determinação exata da taxa de retorno é bastante trabalhosa, e por isso adotamos com freqüência um valor aproximado..." (p.179). Hirschfeld (2000) descreve a obtenção da TIR por meio do "Método por Tentativas", com o uso da interpolação linear (p.252-255). Maracajá, Hess & Ballesté (s/d, p.60-64) dizem mais, que a "... solução de uma análise com esse método apresenta certas dificuldades, porque a pesquisa e os cálculos são feitos por tentativas, e portanto são algo aleatórios" (p.62). Também Vieira Sobrinho (1981) registra, ao se referir à utilização da interpolação linear, que "... o número fornecido por esse critério, obtido através de 'regra de três simples', é sempre um número aproximado" (p.339).

Julga-se, pois, que ao ser apresentada solução para a TIR adotando o Método de Newton-Raphson seja obtido aprimoramento no cálculo, pelo rigorismo e pela exatidão que o método oferece em suas respostas.

De outra parte, deve ser reconhecido que embora alcançada solução mais exata, a adoção do método não colabora para superar uma séria restrição associada ao cálculo da TIR, representada pela geração de inúmeras taxas quando os fluxos de caixa apresentam inúmeras mudanças de sinais, dada a limitação matemática envolvida. Para esses casos, associados a projetos de investimentos do tipo não-convencional, Faro (1979, p.62) aponta que o Teorema de Descartes permite prever a possibilidade da existência de inúmeras raízes, dificultando a aplicação do método. Mais adiante, na mesma obra o autor regis-

tra a preferência por "... ao invés de tentar discutir possíveis outras interpretações para as taxas múltiplas, adotar a determinação de valor atual à taxa mínima de atratividade como o critério decisivo" (p.67). Portanto, a aplicabilidade da TIR pressupõe que algumas propriedades básicas sejam satisfeitas.

Contudo, espera-se que este artigo alcance utilidade e significação ao expor, pelo menos em parte, a beleza dos raciocínios por trás do cálculo da Taxa Interna de Retorno, alicerçado na evolução de uma seqüência lógica que encadeia formidáveis avanços dedutivos, de um passado que se torna valor presente. ◆

NOTAS

- (1) O exemplo apresentado é uma variante do enigma conhecido como "Aquiles e a Tartaruga", registrado em inúmeros livros (BERLINSKI, 1997; DEWDNEY, 2000; MORRIS, 1998).
- (2) "Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos" (Pitágoras *apud* STRATHERN, 1998, p.29).
- (3) Uma comprovação recente dessa hipótese é encontrada em Greene (2001, p.429), que registra a adoção do Teorema de Pitágoras pelos físicos que trabalham com aceleradores de partículas, para calcular distâncias ultramicroscópicas.
- (4) Singh (1998) descreve, em linguagem acessível, a história do enigma introduzido por Pierre de Fermat (Teorema de Fermat), desde suas origens (Pitágoras) até a solução encontrada por Andrew Wiles, em 1993.
- (5) Em Gaukroger (1999) é encontrada a reconstituição cuidadosa da vida e da obra do filósofo e matemático René Descartes.
- (6) Segundo Anton (2000, p.211), a notação dy/dx , utilizada para representar a função derivada, é atribuída a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte*. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- BALARINE, O. *Tópicos de matemática financeira e engenharia econômica*. 2.ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.
- BERLINSKI, D. *A tour of the calculus*. London: Mandarin, 1997.
- DEWDNEY, A. *20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.
- FARO, C. de. *Elementos de engenharia econômica*. 3.ed. São Paulo: Atlas, 1979.
- GARBI, G. *O romance das equações algébricas: a história da álgebra*. São Paulo: Makron-Books, 1997.
- GAUKROGER, S. *Descartes: uma biografia intelectual*. Rio de Janeiro: EdUERJ-Contraponto, 1999.
- GITMAN, L. *Princípios de administração financeira*. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1984.
- GITMAN, L. *Princípios de administração financeira – essencial*. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- GREENE, B. *O universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva*. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- HEISENBERG, W. *Física e filosofia*. 4.ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.
- HIRSCHFELD, H. *Engenharia econômica e análise de custos*. 7.ed. São Paulo: Atlas, 2000.

KOLMAN, B. *Introdução à álgebra linear com aplicações*. 6.ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1998.

KOSKO, B. *Fuzzy thinking*. London: Flamingo, 1994.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 2.ed. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1982.

MARACAJÁ, S.; HESS, G.; BALLESTÉ, F. *Engenharia econômica: análise e seleção de investimentos*. Rio de Janeiro: Unilivros, [s/d].

MORRIS, R. *Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

POPPER, K. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo: Cultrix, 1975.

PUCCINI, A. *Matemática financeira: objetiva e aplicada*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 1998.

SALAS, S. *Salas and Hille's calculus: one variable*. 7th ed. New York: John Wiley, 1995.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

STRATHERN, P. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

VIEIRA SOBRINHO, J. *Matemática financeira*. São Paulo: Atlas, 1981.

Revealing the calculation of the IRR

The traditional solution to problems of project investment analysis dealing with the Internal Rate of Return (IRR) method, is to apply available information systems in financial calculators or in spreadsheets, without regard to the knowledge which backs up these calculations. The paper reviews the mathematical principles and process for these calculations, to give more information to decision makers who, sometimes, employ the IRR method without mastering these rules.

Uniterms: internal rate of return, project appraisal, mathematics.

Revelando el cálculo de la TIR (Tasa Interna de Retorno)

La solución tradicional de problemas de análisis de inversiones en proyectos mediante la adopción del método de la Tasa Interna de Retorno (TIR) se realiza con el empleo directo de sistemas disponibles en calculadoras financieras o en planillas electrónicas, sin que se tenga el cuidado de analizar el conocimiento que fundamenta esos cálculos. Al revisar los conceptos y procesos matemáticos de dichos cálculos, se pretende en el presente artículo ofrecer mejores informaciones a analistas de proyectos que, muchas veces, emplean el método de la TIR sin dominar tal conocimiento.

Palabras clave: tasa interna de retorno, análisis de proyectos, matemáticas.

CADERNO DE PESQUISAS EM ADMINISTRAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO DA FEA/USP

O Caderno de Pesquisas em Administração é uma publicação trimestral para divulgação de trabalhos de natureza acadêmica, com temas relacionados à Administração. Nossos principais colaboradores são alunos e professores de Programas de Pós-graduação em Administração e alunos da graduação com orientação e co-autoria de professores. Todos os trabalhos publicados são avaliados em relação ao conteúdo e à metodologia.

Maiores informações: Editoria do Caderno de Pesquisas em Administração
E-mail: cpa@edu.usp.br
<http://www.ead.fea.usp.br/Cad-pesq>

