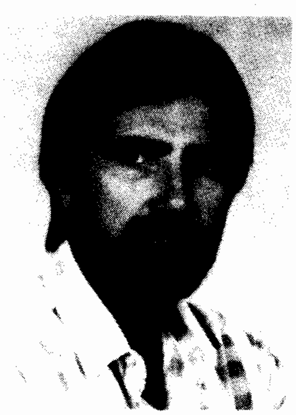
Modelos de estoques com aumento previsto no custo de aquisição*

Este artigo trata do problema de dimensionamento de estoques em uma situação inflacionária caracterizada por aumento antecipado nos custos de aquisição de materiais. Algumas inconsistências importantes nos modelos de decisão propostos na literatura para esta situação são identificadas e resolvidas.



Jaime E. Fensterseifer
Professor Adjunto do Programa de Pós-Graduação em Administração – UFRGS

* Este estudo contou com o apoio financeiro da FINEP.

INTRODUÇÃO

Os efeitos da inflação sobre as políticas de estoque têm sido uma preocupação constante por parte de gerentes de compras e de materiais no Brasil. Esta preocupação foi também observada nos Estados Unidos e Europa durante a maior parte da década de 70 até o início desta, e se refletiu rapidamente na literatura especializada, onde apareceu neste período um crescente número de artigos com as mais variadas proposições de modelos e técnicas de dimensionamento de estoques que levam explicitamente em conta a inflação. Mas esta diversidade de técnicas, de abordagens, de suposições básicas quanto ao ambiente inflacionário e até mesmo de resultados, por vezes inconsistentes, tem causado dificuldades ao gerente de materiais para selecionar o modelo adequado para as condições da sua empresa. Para um *survey* recente destas técnicas ver Fensterseifer & Hoppen (1985).

Neste artigo consideramos o caso particular de um aumento por salto no custo de aquisição de um determinado item. A situação estudada é a seguinte: um aumento de preço de p% é anunciado pelo vendedor, a se efetivar numa determinada data. Qualquer pedido feito agora, no entanto, será atendido ao preço atual e a entrega poderá ser programada para a data prevista de reposição de estoque para este item. O comprador tem, neste caso, a opção de adquirir um lote maior que o habitual, denominado lote especial ou de exceção, para tirar vantagem do aumento anunciado. A questão, portanto, é determinar quanto deve ser comprado antes do aumento.

Este estudo foi motivado pelas inconsistências dos resultados e abordagens propostos na literatura para este problema específico e está organizado da seguinte maneira. Os três primeiros itens descrevem os modelos desenvolvidos por Naddor (1966), Aggarwal (1981) e Weil (1983). No item seguinte é feita uma ilustração da aplicação destes modelos e uma análise dos resultados obtidos e, em seqüência é desenvolvida uma abordagem alternativa, que permite identificar o modelo que leva à decisão correta de investimento em estoque, bem como avaliar as falhas de abordagem dos demais modelos estudados.

Com exceção do modelo de Weil, é feita no desenvolvimento dos demais a suposição de que a empresa vinha adotando o lote econômico de compras para repor seus estoques, antes do aumento de preços. Isto não implica, no entanto, que empresas que não adotem o lote econômico de compra para repor seus estoques não possam utilizar o modelo definido neste artigo como sendo o correto, o que é discutido também no item "análise dos modelos, conclusões e extensões".

A seguinte notação é utilizada no desenvolvimento deste trabalho:

- D = demanda anual do item;
- C = custo unitário de aquisição do item;
- S = custo de efetuar um pedido (custo de obtenção);
- i = custo anual (real) de manutenção de estoque;
- p = percentual de aumento previsto;
- Q_0 = lote econômico de compra antes do aumento: $Q_0 = (2\,DS/Ci)^{1/2}$;
- Q_1 = lote econômico de compra após o aumento: $Q_1 = (2\,DS/C\,(1+p)i)^{1/2}$;
- Q = lote especial ou de exceção (inclui o lote habitual de compra).

O MODELO DE NADDOR

A abordagem utilizada por Naddor consiste na maximização da diferença entre os custo totais de não antecipar a compra e de antecipá-la através de um lote de exceção Q, maior que o lote econômico Q_1, que seria adquirido ao novo preço C(1+p). Estas duas alternativas estão ilustradas na figura 1, onde T_0, T_1 e T representam, respectivamente, os tempos de consumo dos lotes Q_0, Q_1 e Q. As linhas tracejadas representam o que aconteceria na hipótese $Q = 0$. Observe-se que nesta hipótese Naddor considera que o primeiro lote a ser adquirido é Q_1, já ao preço unitário C(1+p) e não Q_0, o lote econômico ao preço não inflacionado C.

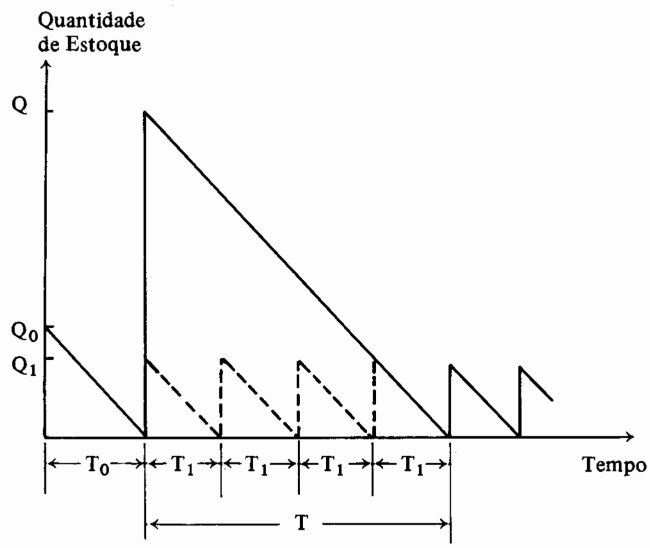


Figura 1

Se um lote especial Q não for adquirido, o custo total (CT_1) durante o período T será a soma dos custos de aquisição, de manutenção e de obtenção. Serão adquiridas no período Q unidades ao custo unitário de C(1+p), o estoque médio será de $Q_1/2$ e serão efetuados Q/Q_1 pedidos de compra. O custo total no período T terá, portanto, a seguinte expressão:

$$CT_1 = QC(1+p) + \frac{1}{2}\,Q_1 C(1+p)iT + S\,\frac{Q}{Q_1}.$$

A aquisição de um lote especial Q a um custo unitário C implicará, por sua vez, em um estoque médio de Q/2 e um único pedido de compra no período. O custo total para esta alternativa (CT_2) será, portanto, dado por:

$$CT_2 = QC + \frac{1}{2}\,QCiT + S.$$

Substituindo $T = Q/D$ e igualando a zero a derivada em relação a Q de $CT_1 - CT_2$, obtém-se a seguinte expressão para o tamanho ótimo do lote especial:

$$Q = \frac{pD}{i} + Q_1(1+p).$$

Ou, como $Q_0 = Q_1(1+p)^{1/2}$,

$$Q = \frac{pD}{i} + Q_0(1+p)^{1/2}. \qquad (1)$$

O MODELO DE AGGARWAL

A figura 2 ilustra o modelo utilizado por Aggarwal, onde a alternativa ao lote especial Q é continuar adquirindo lotes Q_0. Observe-se que estes lotes Q_0 não representam lotes econômicos de compra, pois a partir do aumento o lote econômico passa a ser Q_1.

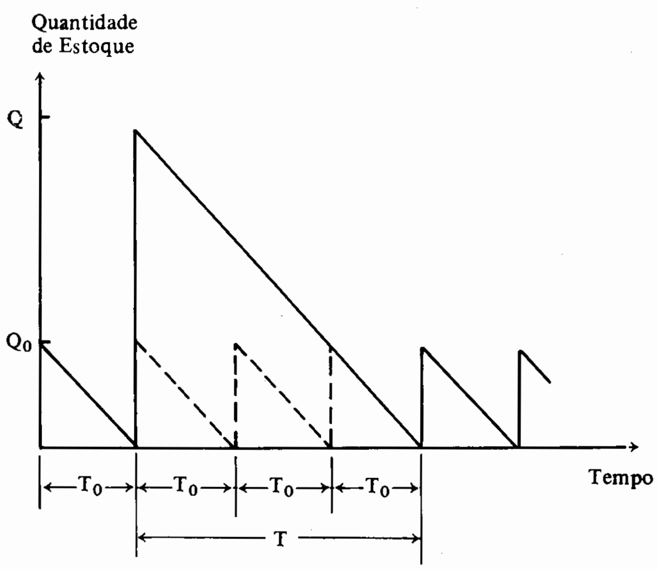


Figura 2

O tamanho do lote especial Q é determinado igualando-se o benefício de adquirir agora um lote maior, ao invés de mais tarde a um preço inflacionado, com o custo adicional de manter um nível mais elevado de estoque, menos o decréscimo proporcional nos custos com pedidos de compra (custos de obtenção).

O lote especial Q causará um aumento no estoque médio de $\frac{1}{2}(Q-Q_0)$ durante o período T. O custo adicional de manutenção de estoque é, portanto, dado por

$$\frac{1}{2}(Q - Q_0)CiT.$$

A redução proporcional nos custos de obtenção será de

$$\frac{Q - Q_0}{Q_0} S,$$

e a economia resultante nos custos de aquisição será de

$$(Q - Q_0)Cp.$$

Igualando-se os custos e os benefícios adicionais resultantes da aquisição de um lote especial, obtém-se, após substituir $T = Q/D$, como tamanho ótimo do lote,

$$Q = \frac{2pD}{i} + Q_0.$$

Esta expressão difere substancialmente da obtida por Naddor.

O MODELO DE WEIL

A abordagem utilizada por Weil é semelhante à de Aggarwal, pois determina o tamanho do lote especial como sendo aquele que iguala a economia feita pela compra antecipada com as despesas adicionais que seriam incorridas. Mas ela difere tanto da abordagem de Aggarwal como da de Naddor em um aspecto importante: enquanto estes assumem que as compras eram feitas segundo o modelo do lote econômico, Weil considera que lotes de Q' unidades vinham sendo adquiridos, não necessariamente lotes econômicos.

Na análise de Weil, a economia decorrente da aquisição de um lote especial é a soma da economia no custo de aquisição, mais a economia dos custos de pedidos que não seriam necessários, ou seja:

$$(Q - Q')Cp + \frac{Q - Q'}{Q'} S, \qquad (2)$$

onde $Q - Q'$ representa a quantidade acima do lote normal a ser adquirida.

O custo adicional é também constituído por duas parcelas: o custo de manutenção de estoque durante o período de consumo de Q', onde $Q - Q'$ fica sem utilização, e o custo de manutenção durante o período de consumo de $Q - Q'$, em que o estoque médio será de $(Q - Q')/2$. Sendo o período de consumo de Q' igual a Q'/D e o de $Q - Q'$ igual a $(Q - Q')/D$, obtém-se a seguinte expressão para o custo adicional:

$$(Q - Q')\frac{Q'}{D} Ci + \left(\frac{Q - Q'}{2}\right) Ci \left(\frac{Q - Q'}{D}\right). \qquad (3)$$

Igualando-se as expressões (2) e (3), obtém-se, após simplificações, a expressão para a quantidade extra, além da quantidade normal, a ser adquirida:

$$Q - Q' = \frac{2D\left(Cp + \frac{S}{Q'} - \frac{Q'Ci}{D}\right).}{Ci}$$

Ou, para efeitos de comparação com os dois resultados anteriores, o tamanho do lote especial será de

$$Q = Q' + \frac{2D\left(Cp + \frac{S}{Q'} - \frac{Q'Ci}{D}\right)}{Ci}.$$

Este resultado de Weil, se válido para qualquer lote Q' de compra, deve ser também válido para o caso em que Q' for igual ao lote econômico de compra, Q_0. Neste caso, a expressão para o lote especial ficaria, após algumas manipulações algébricas:

$$Q = \frac{2Dp}{i} + \frac{1}{Q_0}\frac{2DS}{Ci} - Q_0.$$

Mas, como $Q_0 \doteq (2DS/Ci)^{1/2}$, a expressão se reduz simplesmente a

$$Q = \frac{2Dp}{i},$$

diferindo tanto do resultado de Aggarwal como do de Naddor.

Obviamente, todos os três modelos não podem estar corretos, pois todos eles se propõem a resolver o mesmo problema de decisão.

Na seção seguinte, serão analisados os resultados que seriam obtidos através da utilização destes três modelos.

ILUSTRAÇÃO DOS MODELOS

Para ilustrar a aplicação dos modelos analisados e avaliar os resultados que seriam obtidos a partir dos mesmos, consideramos o seguinte exemplo:

Uma empresa vinha adotando o modelo do lote econômico para repor o estoque de um determinado item, que custa Cz$ 1,00 a unidade (custo de aquisição). O custo de um pedido de compra (custo de obtenção) é de Cz$ 10,00, o custo (real) de manter estoque é de 25% e o consumo anual deste item é de 18.000 unidades. O vendedor comunica que o preço vai aumentar de 15%. Quantas unidades devem ser adquiridas antes do aumento?

Temos, portanto:

C = Cz$ 1,00
S = Cz$ 10,00
D = 18.000 unidades
i = 0,25
p = 0,15
$Q_0 = \sqrt{2DS/Ci}$ = 1440 unidades

a) Pelo *modelo de Naddor:*

$$Q = \frac{PD}{i} + Q_0(1+p)^{1/2}$$

$$Q = \frac{(0{,}15)\,(18.000)}{0{,}25} + 1440\,(1+0{,}15)^{1/2}$$

$Q \doteq$ 12.343 unidades.

Isto representa um investimento extra em estoque $(Q - Q_0)$ de 10.903 unidades, ou seja, o consumo de aproximadamente 7,3 meses.

b) Pelo *modelo de Aggarwal:*

$$Q = \frac{2pD}{i} + Q_0$$

$$Q = \frac{2(0{,}15)\,(18.000)}{0{,}25} + 1440$$

Q = 23.040 unidades.

O investimento extra em estoques seria, neste caso, de 21.600 unidades, ou seja, o consumo de 14,4 meses.

c) Pelo *modelo de Weil:*

$$Q = \frac{2pD}{i}$$

$$Q = \frac{2(0{,}15)\,(18.000)}{0{,}25}$$

Q = 21.600 unidades.

O investimento extra em estoque seria, portanto, de 20.160 unidades, ou seja, o consumo de aproximadamente 13,5 meses.

Os modelos de Aggarwal e de Weil recomendam, para a situação deste exemplo, investimento extra em estoque de aproximadamente o dobro do de Naddor. De fato, comparando-se as três fórmulas propostas, pode-se verificar que a de Aggarwal indicará em todas as situações praticamente o dobro da quantidade extra a adquirir que seria indicada pela fórmula de Naddor. E a de Weil difere da de Aggarwal somente pela quantidade Q_0.

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA

O modelo para a determinação do tamanho ótimo do lote especial será desenvolvido para a situação representada pela figura 3, através da utilização de análise marginal. As linhas tracejadas representam o que aconteceria se $Q=Q_0$, ou seja, na hipótese de não se efetuar um investimento extra em estoque.

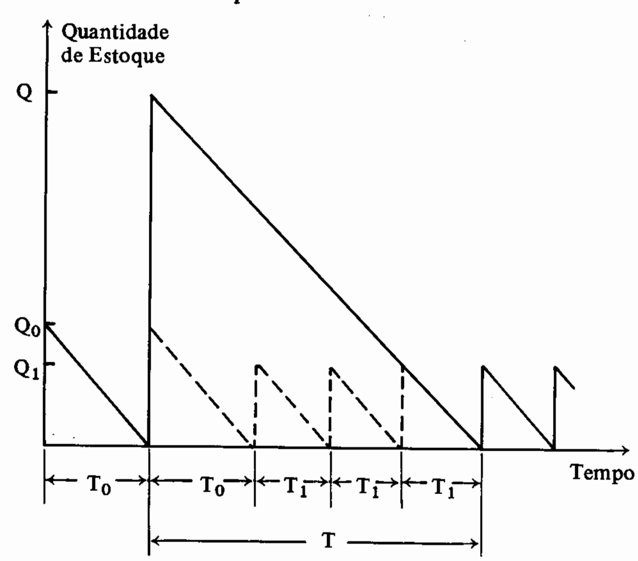


Figura 3

Observe-se que a alternativa ao lote especial Q é adquirir Q_0 (o lote econômico ao preço atual C) seguido de lotes Q_1 (o lote econômico ao preço inflacionado $C(1+p)$).

O lote epecial Q acarretará, em relação à política alternativa $\{Q_0, Q_1, Q_1, \ldots\}$, em menores custos de aquisição e de obtenção, mas em custos mais elevados de manutenção de estoque; implica, portanto, em custos adicionais (CA) e em benefícios adicionais (BA) em relação à política alternativa. O valor ótimo de Q será aquele ponto em que o benefício adicional decorrente da aquisição de uma unidade a mais do item seja igual ao seu custo adicional, isto é, o ponto em que o benefício marginal (BM) seja igual ao custo marginal (CM).

A economia no custo de aquisição durante o período T será de

$$(Q - Q_0)Cp,$$

e a redução proporcional no custo de obtenção será de

$$\frac{Q - Q_0}{Q_1} S.$$

O benefício adicional decorrente do lote especial será, portanto:

$$BA = (Q - Q_0)Cp + S(Q - Q_0)/Q_1.$$

O custo adicional no período T decorre da diferença de estoques médios para as duas alternativas. Para o lote especial (estoque médio igual a $Q/2$ no período T) o custo de manutenção de estoque será de

$$\frac{1}{2} QCiT$$

e para a política alternativa (estoque médio de $Q_0/2$ no período T_0 e de $Q_1/2$ no período $T - T_0$), de

$$\frac{1}{2} Q_0 CiT_0 + \frac{1}{2} Q_1 C(1+p)i(T - T_0).$$

O custo adicional será a diferença destes dois custos que, após simplificações e substituindo $T = Q/D$ e $T_0 = Q_0/D$, resulta:

$$CA = (Q^2 - Q_0^2)Ci/2D - Q_1(Q - Q_0)C(1+p)i/2D.$$

O tamanho do lote especial a ser adquirido será determinado pela quantidade que torna igual benefício e custo marginais, dados respectivamente por:

$$BM = \frac{dBA}{dQ} = Cp + S/Q_1$$

e

$$CM = \frac{dCA}{dQ} = QCi/D - Q_1 C(1+p)i/2D.$$

Fazendo-se BM = CM, obtém-se a seguinte expressão para o lote especial:

$$Q = \frac{pD}{i} + \frac{Q_1(1+p)}{2} + \frac{1}{Q_1}\frac{SD}{Ci}.$$

Como $\dfrac{SD}{Ci} = \dfrac{Q_0^2}{2}$ e $Q_0 = Q_1(1+p)^{1/2}$, obtém-se, após simplificações,

$$Q = \frac{pD}{i} + Q_1(1+p).$$

Esta expressão coincide com a obtida por Naddor, cuja abordagem de maximização de $CT_1 - CT_2$ é equivalente à análise marginal aqui desenvolvida. Apesar da figura 1 diferir da figura 3, que representa corretamente a situação analisada, o mesmo resultado é obtido. A análise marginal desta seção permitirá facilmente identificar as falhas de abordagem dos outros modelos propostos.

ANÁLISE DOS MODELOS, CONCLUSÕES E EXTENSÕES

O desenvolvimento do item anterior nos leva a concluir que o modelo desenvolvido por Naddor é o que leva à correta decisão de compra antecipada.

Os modelos propostos por Aggarwal e por Weil que, à primeira vista, parecem ter sido corretamente desenvolvidos, apresentam uma falha comum de abordagem. Na determinação do lote especial Q, ambos os autores simplesmente igualam custos e benefícios adicionais decorrentes do pedido extra, e não os custos e benefícios *marginais*, isto é, os custos e benefícios decorrentes da aquisição de uma unidade a mais do item. Conseqüentemente, suas fórmulas fornecem o tamanho do lote especial que deixaria o gerente de compras *indiferente* entre adquirir o lote maior ou continuar adquirindo lotes como vinha fazendo até então; ambas as alternativas (compra antecipada ou não) têm o mesmo custo total.

Obtendo-se os custos e benefícios marginais a partir das expressões de custos e benefícios adicionais (que são as diferenças entre custos e benefícios totais das duas alternativas) dos modelos de Aggarwal e de Weil, chegar-se-ia às seguintes fórmulas:

Para Aggarwal: $$Q = \frac{pD}{i} + Q_0$$

Para Weil: $$Q = \frac{pD}{i} + \frac{Q_0}{2}$$

Observa-se que as fórmulas a que se chegaria ainda diferem da de Naddor, embora a diferença seja pequena (para a ilustração dos modelos esta diferença seria insignificante). Mas a não coincidência com a fórmula de Naddor nos leva a concluir que existem outras falhas nos modelos de Aggarwal e Weil. Ocorre que o problema decisório em questão é equivalente à determinação do nível ótimo de investimento em estoque *adicional* àquele que se compraria normalmente se não houvesse sido anunciado o aumento iminente do preço do item. Para se chegar ao nível correto de investimento em estoque adicional, a comparação deve ser feita com a política ótima a ser seguida caso não se tire proveito do aumento de preço. Isto não ocorre nos modelos de Aggarwal e Weil, que consideram em suas análises a alternativa ao investimento em estoque extra a aquisição de lotes de reposição *após* o aumento de preço, iguais aos que vinha utilizando, e não lotes econômicos.

Em suma, para o desenvolvimento de um modelo que permita dimensionar o investimento em estoque adicional em virtude de um aumento previsto de preço, os custos e benefícios deste investimento extra devem ser determinados em função de uma política ótima de reposição de estoque a ser seguida no caso de não efetuar o investimento, independentemente da política de reposição de estoque que a empresa adote. Assim, se uma empresa vinha repondo seus estoques de um determinado item em lotes Q', diferente do lote econômico, o nível ótimo de investimento em estoque adicional deverá ser de $Q - Q'$, onde Q é obtido pela expressão (1). A situação de o estoque disponível ser diferente de zero no ponto em que seria entregue o lote especial pode ser vista como um caso semelhante a este. Brown (1967) demonstrou que se q_0 fosse o estoque disponível quando do recebimento do lote especial, o tamanho ótimo deste deveria ser simplesmente de $Q - q_0$.

Pode-se observar, finalmente, examinando a expressão (1), que, como $Q_0(1+p)^{1/2} \approx Q_0$, uma boa aproximação para o investimento extra em estoque é dada simplesmente por pD/i. Ou, se i for o custo *mensal* de manutenção de estoque (cujo componente principal para a maioria dos produtos estocáveis é o custo de oportunidade do dinheiro), a expressão aproximada para o investimento extra torna-se simplesmente p/i, dado, neste caso, em meses de consumo do item.

BIBLIOGRAFIA

AGGARWAL, Summer C. – Purchase-inventory decision models for inflationary conditions. *Interfaces*, 11(4), agosto 1981.

BROWN, Robert G. – *Decision rules for inventory management.* New York. Holt, Rinehart and Winston, 1967.

FENSTERSEIFER, Jaime E. & HOPPEN, Norberto – Sobre alguns modelos de estoques com inflação. *Revista de Administração de Empresas*, Rio de Janeiro, FGV, 25(2), abr/jun 1985.

NADDOR, Eliezer – *Inventory systems.* New York, Wiley & Sons, 1966, p. 96-102.

WEIL, Kurt. – Aumento previsto e abatimento possível – um tratamento quantitativo formal e simplificado. *Revista de Administração de Empresas*, Rio de Janeiro, FGV, 23, jan/mar 1983.