MODELOS DE DIFUSÃO EM MARKETING, ANÁLISE SOB A ÓTICA DA INTERAÇÃO ENTRE ADOTADORES

Jairo Simon da Fonseca

Professor Titular da FEA-USP. Professor de disciplinas de Métodos Quantitativos no Pós-Graduação em Administração da FEA-USP.

Um dos problemas básicos com que se defronta o especialista de marketing na administração de produtos, refere-se à penetração destes nos diversos mercados consumidores. Em decorrência disto, aspectos como potencial e demanda de mercado são importantes pontos a serem considerados na formulação de estratégias e programas de marketing. Dentre as formas de se estudar a penetração de mercado, destaca-se aquela representada pelo emprego de modelos de difusão.

Nos últimos anos o estudos dos modelos de difusão tiveram um grande desenvolvimento, por se tratar de um tópico aplicável a uma gama bastante ampla de áreas do conhecimento científico, como biologia, ciências sociais, ecologia, transferência de tecnologia, marketing e outras de menor afinidade com a área referida neste trabalho.

Rogers e Shoemaker (1971) definem difusão como o processo pelo qual uma inovação espalha-se entre os membros de um sistema social. Toda inovação sendo comunicada entre os membros de um particular sistema social, caracteriza um processo de difusão composto de sete elementos: inovação, adotadores da inovação, canais da inovação, tempo, espaço, agentes de mudança e sistema social.

Em termos específicos de marketing, devemos imaginar a difusão de uma inovação não como o resultado de uma difusão de adotadores de uma região de alta densidade para uma outra de baixa densidade de adoção, mas sim, como o movimento da inovação entre adotadores do produto, considerado no seu conceito genérico. Rogers (1964) identifica que a adoção de uma inovação pelo consumidor envolve cinco estágios: (1) percepção; (2) interesse; (3) avaliação; (4) experimentação; (5) adoção. No que se refere especificamente aos adotadores, distingue-se cinco grupos principais: (a) os inovadores; (b) os adotantes iniciais; (c) a maioria adotante inicial; (d) a maioria tardia; (e) os adotantes retardatários (Boyd Jr & Massy, 1978).

Verifica-se assim que, apesar de intimamente relacionados, o processo de difusão deve ser distinguido do processo de adoção. O primeiro refere-se basicamente à penetração de mercado do produto e o segundo refere-se à seqüência de estágios através dos quais a adoção progride do primeiro conhecimento da inovação até a sua aceitação final.

Nosso objetivo neste trabalho é o de apresentar e analisar os principais modelos de difusão aplicados a marketing sob a óptica da interação entre adotadores.

MODELO GENERALIZADO ESTÁTICO

Estrutura do Modelo

A partir dos conceitos apresentados inicialmente por Rogers (1964) referentes ao processo de difusão de inovações, pode se estruturar um modelo generalizado estático dessa difusão.

Admitamos $P(t)$ como sendo a população do sistema social em uma época t e $\bar{N}(t)$ como a população dos adotadores potenciais, isto é, o número máximo de adotadores em uma época t na população $P(t)$ do sistema social, também denominado de mercado potencial, em que $\left(\bar{N}(t) \leqslant P(t)\right)$

Assim sendo, tem-se que:

$N(t)$ = número acumulado de adotadores em t;

$n(t)$ = número de adotadores não acumulado em t, tal que:

$$N(t) = \int_{t_0}^{t} n(t)\, dt$$

ou

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = \dot{N}(t)$$

Vamos assumir que $n(t)$ e $N(t)$ são funções contínuas com derivadas em todos os pontos e que $n(t)$ seja uma função unimodal e ainda que $\bar{N}(t)$ seja constante no tempo igual a $\bar{N}$.

A hipótese fundamental é que a taxa de difusão $\dot{N}(t) = N(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ é diretamente proporcional ao número de adotadores potenciais. Em outras palavras, à medida que o número acumulado de adotadores aproxima-se do seu patamar $\bar{N}$, a taxa de difusão decresce proporcionalmente:

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt}\ \alpha \left(\bar{N} - N(t)\right).$$

Denominando-se a constante de proporcionalidade $g(t)$ de coeficiente de difusão, obtém-se:

$$n(t) = \dot{N}(t) = g(t)\left(\bar{N} - N(t)\right)$$

Conseqüentemente, $g(t)$ pode ser interpretada como a probabilidade de uma adoção em t, pois, $\left(\bar{N} - N(t)\right)$ é o número dos que ainda não adotaram a inovação e o produto $\left(\bar{N} - N(t)\right)$ fornece o número esperado de adotadores em t.

Como foi visto anteriormente, o coeficiente de difusão é função de sete elementos básicos. Neste trabalho adotaremos para $g(t)$ o enfoque básico de que $g(t)$ é função linear do número de adotadores prévios, sendo expresso por:

$$g(t) = a + bN(t)$$

onde *a* e *b* são constantes positivas.

Desse modo, o número de adotadores não acumulado em t passa a ser:

$$n(t) = \dot{N}(t) = \left(a + bN(t)\right)\left(\bar{N} - N(t)\right)$$

Na relação acima temos dois fatores importantes. O primeiro, representado por $\left(a+bN(t)\right)$, é denominado fator de momento, o qual aumenta quando $n(t)$ aumenta. O segundo é representado por $\left(\bar{N}-N(t)\right)$ é denominado de fator de contenção, o qual diminui quando $N(t)$ aumenta. Em outras palavras, o fator de momento representa a penetração de mercado conseguido pelo produto e o fator de contenção o quanto do mercado potencial não está atendido.

Desse modo reescrevendo a equação sob a nova forma, temos:

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = N(t) = a\left(\bar{N} - N(t)\right) +$$

$$+ b\,N(t)\left(\bar{N} - N(t)\right)$$

Esta função pode ser empregada como representativa de fenômenos extra-marketing tais como, espalhamento epidêmico e crescimento de população em sistemas ecológicos. No caso da penetração do produto no mercado, podemos interpretar a constante *a* como um índice de adoção não influenciada, refletindo a adoção pelo grupo denominado de inovadores, os quais reagem favoravelmente ao lançamento de novos produtos.

A constante *b* pode ser considerada como um índice de adoção influenciada, tomando-se em conta a interação são as mais diferentes formas, entre adotadores e não adotadores. Assim sendo, o coeficiente *b* pode ser interpretado como um coeficiente de inovação.

Dependendo da ênfase relativa dada aos coeficientes *a* e *b*, obtemos os diferentes modelos de difusão.

Otimização do Modelo

A solução da equação diferencial (anexo I) dada por:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + b\,N(t)\right)\left(\bar{N} - N(t)\right)$$

em que

$$N(t - t_o) = N_o$$

permite calcular o número acumulado de adotadores, representado por:

$$N(t) = \frac{N - [\,a(\bar{N} - N_o)\,] / (a + bN_o)\,]}{1 + [\,b(\bar{N} - N_o)\,] / (a + bN_o)\,]}$$

$$\frac{\exp[\,-(a + b\bar{N})(t - t_o)\,]}{\exp[\,-(a + b\bar{N})(t - t_o)\,]}$$

Em termos do número não acumulado de adotadores n(t), basta derivar a expressão acima, obtendo-se:

$$n(t) = \frac{[\,(\bar{N} - N_o)\,(a + bN)^2\,/}{[\,1 + [b\,(\bar{N} - N_o)}$$

$$\frac{(a + bN_o)\,]\exp[\,-(a + b\bar{N})(t - t_o)\,]}{(a + bN_o)\,]\exp[\,-(a + b\bar{N})(t - t_o)\,]\,]^2}$$

O ponto de máximo obtendo para $\overset{*}{t}$ é dado por:

$$\overset{*}{t} - t_o = -\frac{1}{(a + b\bar{N})}\,\ell n\,\frac{a + bN_o}{b(\bar{N} - N_o)},$$

onde $b \neq -\frac{a}{\bar{N}}$

tal que:

$$n(\overset{*}{t}) = \frac{(a + b\bar{N})^2}{4b} \text{ e}$$

$$N(t) \quad N(\overset{*}{t}) = \frac{(b\bar{N} - a)}{2n} \qquad 2b$$

Se não existirem adotadores prévios, tem-se que, $N(t_o) = N_o = 0$ para $t_o = 0$, obtendo-se assim as relações simplificadas:

$$N(t) = \frac{\bar{N}\left(1 - \exp[\,-(a + b\bar{N})\,t\,]\right)}{1 + \frac{b\bar{N}}{a}\exp[\,-(a + b\bar{N})\,t\,]} \text{ e}$$

$$n(t) = \frac{[\,\bar{N}\,(a + b\bar{N})\,/\,a\,]\exp[\,-(a + b\bar{N})\,t\,]}{\left(1 + \frac{b\bar{N}}{a}\exp[\,-(a + b\bar{N})\,t\right)^2}$$

Deve-se ressaltar que os valores máximos são os mesmos apresentados no caso anterior, substituindo-se $t_o = 0$ e $N(t_o) = 0$.

Estimação dos Parâmetros do Modelo

Os parâmetros do modelo generalizado podem ser estimados, após a discretização da relação básica, representada por:

$$n(t) = \bar{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt} = a\,\bar{N} +$$

$$+ (b\bar{N} - a)\,N(t) - bN^2(t).$$

Discretizando, obtemos n(t) = N(t + 1) – N(t). Portanto, o número de adotantes acumulados no período subseqüente será dado por:

$$N(t + 1) = a\bar{N} + (b\bar{N} - a + 1)\,N(t) - bN^2(t)$$

notando-se:

$$\alpha_1 = a\overline{N}$$

$$\alpha_2 = b\overline{N} - a + 1$$

$$\alpha_3 = - b$$

tem-se a seguinte relação:

$$N(t + 1) = \alpha_1 + \alpha_2 N(t) + \alpha_3 N^2(t)$$

A estimação das contantes α_1, α_2 e α_3 é obtida utilizando-se o método dos mínimos quadrados na relação de regressão:

$$N(t) = \alpha_1 + \alpha_2 N(t - 1) + \alpha_3 N^2(t - 1)$$

O valor representado por

$N(t - 1) = \sum_{x\ i = 1}^{t-1} n(i)$, corresponde ao número acumulado de adotadores em $(t - 1)$.

Uma vez estimados α_1, α_2 e α_3, podemos calcular a, b e $\overline{N}$ da seguinte maneira:

$$b = \alpha_3$$

$$a = b\overline{N} - \alpha_2 + 1 = - \alpha_3\overline{N} - \alpha_2 \text{ ü } 1 = \frac{\alpha_1}{\overline{N}},$$

ou

$$a = \alpha_3 \overline{N} + (\alpha_2 - 1)\overline{N} + \alpha_1 = 0$$

Resolvendo a equação obtém-se:

$$\overline{N} = \frac{- (\alpha_2 - 1) \pm \sqrt{(\alpha_2 - 1)^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_3}$$

Assim sendo, o coeficiente *a* é expresso por:

$$a = - \alpha_3 \overline{N} - \alpha_2 - 1$$

Deve-se ressaltar, por último, que é de extrema importância a estimação dos parâmetros *a* e *b*, tendo em vista que esses valores vão determinar a forma da distribuição dos adotadores da inovação.

Modelos especiais

Modelo de Difusão Côncava

Este modelo foi originalmente proposto por Fourt & Woodlock (1960) para aplicações em produtos susceptíveis de serem comprados apenas uma única vez. Tem como característica básica o fato de vendas apresentarem uma tendência declinante quando da aproximação, em relação ao mercado potencial, o qual é considerado constante. Este modelo também é válido para produtos duráveis cuja venda de reposição apresenta uma cadência fraca.

As hipóteses fundamentais para a geração deste modelo são duas:

1) $N(t = 0) = 0$

2) $b = 0$, isto é, todos os adotadores são inovadores ou cada adoção é o resultado de uma inovação independente, de tal forma que os não adotadores não são influenciados pelos adotadores.

Da relação (2), temos:

$$N(t) = \overline{N}\left(1 - \exp(- at)\right) = \overline{N}\left(1 - \ell^{-at}\right)$$

Esta relação caracteriza o modelo de penetração de mercado sugerido por Fourt & Woodlock (1960).

A caracterização fundamental desse modelo é a ausência de interação entre os compradores. Assim, o número de adotadores em *t* é obtido através da expressão:

$$n(t) = \overline{N}(t) = \left(\overline{N} - N(t)\right)$$

onde podemos constatar a presença somente de um dos fatores, o fator de contenção, conduzindo o modelo a uma forma côncava.

Modelo Logístico

Sob o prisma histórico, Roos & Von Szeliski (1939) foram os primeiros autores a ajustarem uma curva logística, no caso para o crescimento da demanda de automóveis nos Estados Unidos. O argumento utilizado para o emprego dessa função relacionou-se à observação de que o aumento da frota circulante era dado pelo número de potenciais compradores multiplicado pela probabilidade de uma nova aquisição, sendo esta probabilidade proporcional ao número de automóveis já adquiridos.

De um ponto de vista conceitual, este modelo é o oposto do modelo de Fort & Woodlock e sua hipótese fundamental é que a = 0. Isto implica que o modelo assume a difusão ocorrendo como o resultado de pura imitação ou de adoção influenciada.

Da equação (2), admitindo-se que a = 0 e $t_0 = 0$ obtém-se a equação:

$$N(t) = \frac{\bar{N}}{1 + \frac{(N - N_o)}{N_o} \exp(-b\bar{N}t)}$$

cujo gráfico representa a curva logística, sugerindo-se a denominação de modelo logístico, pois trata-se de um modelo de difusão em S.

A caracterização básica deste modelo, em termos do padrão de difusão em um sistema social, repousa na existência de um processo de imitação entre os potenciais compradores, o qual constitui regra fundamental da interação humana.

O modelo logístico visto da equação geradora:

$$n(t) = \bar{N}(t) = b\, N(t)\left(\bar{N} - N(t)\right)$$

leva em conta tanto o fator de contenção quanto o de momento, cada um agindo de forma oposta sobre o comportamento da variável n(t).

Modelo de Gompertz

A função de Gompertz foi utilizada pela primeira vez por Prescott (1922) para estudar "leis" de crescimento da demanda, a partir da constatação de que o crescimento de uma indústria evolui segundo quatro fases distintas: introdução ou experimentação, crescimento a taxas crescentes, crescimento a taxas decrescentes e um período de estabilização. Desse modo, o modelo de Gompertz é conceitualmente semelhante ao modelo logístico, apenas com uma ligeira modificação na equação geradora:

$$\bar{N}(t) = -\ln b\, N(t)\left(\ln\bar{N} - \ln N(t)\right)$$

A integração desta equação diferencial nos conduz à relação:

$$N(t) = \bar{N}a^{b^t}$$

representa a curva de Gompertz, a qual os dois modelos de difusão em S aqui citados foram aplicados no estudo do comportamento das vendas de televisores preto e branco ao mercado brasileiro, fornecendo resultados práticos bastante razoáveis (Fonseca e Mazzon, 1978).

Modelo de Bass

O modelo de Bass (1969) foi originalmente aplicado em marketing nos Estados Unidos para descrever o comportamento das vendas de vários bens de consumo durável. No Brasil, foi também por nós utilizado no estudo das vendas de televisores (Fonseca et alii, 1978).

O modelo originário da área de epidemiologia, supõe a presença tanto de compradores inovadores como de compradores imitadores. Admite também um índice de adoção influenciada constante e inversamente relacionado ao nível superior acumulado de adotadores $\bar{N}$.

Presumivelmente uma inovação com grande potencial de mercado, não terá uma alta taxa influenciada, como uma inovação com um mercado potencial pequeno.

Matematicamente, temos as seguintes relações impostas pelas hipóteses:

1) a e $b \neq 0$

2) $N(t = 0) = 0$

3) $b = \frac{q}{\bar{N}}$ onde q é uma constante

Substituindo estas relações na relação (2), obtemos:

$$N(t) = \frac{\bar{N}\left(1 - \exp[-(a+q)t]\right)}{1 + \frac{q}{a}\exp[-(a+q)t]}$$

Com a finalidade de ilustrar com dados reais a aplicação desse modelo, apresentamos no quadro a seguir os resultados obtidos por nós e referentes ao mercado brasileiro e por Bass nos Estados Unidos, referentes ao mercado americano, relativamente às vendas de televisores preto e branco:

Parâmetros / Produto	N (10^6)		a		q	
	Brasil	EUA	Brasil	EUA	Brasil	EUA
Televisores preto e branco	16,433	96,717	0,0017	0,0278	0,2426	0,2510

Podemos observar que o coeficiente de imitação (q) é aproximadamente igual para os dois países, mas o valor do coeficiente de inovação (a) por nós obtido é muito discrepante do valor obtido por Bass nos EUA. Uma explicação plausível para tal resultado, seria o reduzido número de famílias com um maior nível de renda, fato que minimizaria o papel dos inovadores no processo de aquisição e difusão da compra de televisores no Brasil.

MODELO GENERALIZADO DINÂMICO

Este modelo foi desenvolvido por Mahajan e Peterson (1978) e engloba o modelo generalizado estático. Este pode ser considerado um caso particular do modelo dinâmico, quando supomos que o número de adotadores potenciais se mantém constante, ou seja, quando $\bar{N}(t) = \bar{N}$.

Neste item do trabalho nos baseamos no artigo dos autores acima citados, sendo o único trabalho publicado até a presente data que conjuga aspectos teóricos do modelo com a exemplificação da aplicação de um caso real.

Vamos considerar $N(t) = f(S(t))$ onde $S(t)$ é um vetor de todos os fatores relevantes, exógenos e endógenos, controláveis e não controláveis, que afetam N(t), como condições sócio-econômicas, variação da população, ações do governo, esforço de marketing e outros.

A equação diferencial básica que gera o modelo é assim expressa:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + bN(t)\right)\left(f\left(S(t)\right) - N(t)\right)$$

com as condições iniciais:

$$N(t = t_o) = N_o$$
$$f$$
$$f\left(S(t_o)\right) = f_o$$

A solução da equação diferencial acima, deduzida em anexo, é a seguinte:

$$(5)\ N(t) = \frac{f\left(S(t)\right) - [\,a\,(f_o - N_o)\,/}{1 + [\,b(f_o - N_o)\,/}$$

$$\frac{(a + bN_o)\,]\exp[-a(t - t_o) - bM(t)\,]}{(a + bN_o)\,]\exp[-a(t - t_o) - bM(t)\,]}$$

$$\text{onde: } M(t) = \int_{t_o}^{t} f\left(S(t)\right)dt$$

A relação acima reduz a relação do modelo estático, quando $N(t) = f\left(S(t)\right) = \bar{N}$.

No estágio atual de conhecimento sobre o modelo e, por simplificação, no caso da inovação de um produto, N(t) é expresso em função do crescimento da população, de tal forma que o grau de precisão da previsão do modelo dinâmico é influenciado pela precisão do crescimento da população do sistema social.

Para melhor ilustrar o modelo generalizado dinâmico, vamos aqui descrever uma aplicação que os autores acima mencionados fizeram nos Estados Unidos, referente a dados sobre máquina de lavar roupas, onde a população do sistema social P(t) foi considerada como o número de licenciamento de novas moradias naquele país.

Os dados sobre máquinas de lavar englobam todas as classes de máquinas, bem como todas as marcas no período de 1950-1974, ressaltando-se que o número de novos domicílios mais que triplicou neste mesmo período.

Como $\overline{N}(t)$ é expresso em função de P(t), vamos primeiro determinar o modelo para a previsão do crescimento da população do sistema social:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left(m_1 + m_2\, P(t)\right)\left(\overline{P} - P(t)\right)$$

com condições iniciais $P(t = t_o) = P_o = P(0) = 0$, cuja solução já apresentada é a seguinte:

$$P(t) = \frac{\overline{P}\left(1 - \exp\left[-(m_1 + m_2\,\overline{P})\, t\right]\right)}{1 + [\,m_2/m_1\,]\exp\left[-(m_1 + m_2\,\overline{P}) + t\right]}$$

Os resultados obtidos pelos autores foram os seguintes:

$m_1 = 11{,}36 \times 10^{-4}$

$m_2 = 14{,}23 \times 10^{-8}$

P $\overline{P} = 271 \times 10^6$

$R^2 = 0{,}65$

Admitindo-se que $N(t) = f(P(t)) = k_1 + k_2\, P(t)$ e substituindo-se na equação diferencial básica geradora do modelo dinâmico, temos:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + bN(t)\right)\left(k_1 + k_2\, P(t) - N(t)\right)$$

A solução desta equação diferencial é dada pela relação (5) onde M(t), também especificado no anexo, tem a seguinte expressão:

$$M(t) = \int_{t_o}^{t} f\left(S(t)\right)dt = k_1\,(t - t_o) +$$

$$+ k_2\, \ln\left[\frac{Y(t)}{Y(t_o)}\right]^{\beta_1}\left[\frac{Z(t)}{Z(t_o)}\right]^{\beta_2}$$

onde

$$Y(t) = \frac{m_2\,\overline{P}}{m_1} + \exp\left[\,(m + m\,\overline{P})\, t\,\right],$$

$$Z(t) = 1 + \frac{m_2\,\overline{P}}{m}\exp\left[\,-(m + m\,\overline{P})\, t\,\right]$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{P}}{(m_1 + m_2\,\overline{P})}\ \text{e}$$

$$\beta_2 = \frac{m_1}{m_2\,(m_1 + m_2)\,\overline{P}}$$

Os parâmetros k_1 e k_2 foram estimados supondo a = 0 na relação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + bN(t)\right)\left(k_1 + k_2\, P(t) - N(t)\right)$$

da seguinte maneira:

$$\frac{d\,\ln N(t)}{dt} = b\left(k_1 + k_2\, P(t) - bN(t)\right) \text{ ou}$$

$\ln N(t + 1) = \ln N(t) = b\,k_1 + b\,k_2\, P(t) - bN(t)$

$= B_1 + B_2\, P(t) + B_3\, N(t)$

Nesta última equação são necessários dados da população do sistema social P(t) bem como os dados do número acumulado de adotadores N(t).

Uma vez estimados os parâmetros k_1 e k_2 e também estimados m_1, m_2 e $\overline{P}$ e conseqüentemente Y(t), Z(t), β_1 e β_2, temos determinado M(t) que, substituído na relação básica (5), permite prever o número de adotadores em uma determinada época.

O quadro a seguir apresenta os valores reais obtidos por Mahajan & Peterson (1978) com dados referentes à adoção de máquina de lavar:

	Período	
Equação de Regressão	(1950-1974)	(1950-1965)
B_1	-1,2811	-1,3733
B_2	$0{,}1179 \times 10^{-3}$	$0{,}1276 \times 10^{-3}$
B_3	$-43{,}6000 \times 10^{-6}$	$-48{,}4200 \times 10^{-6}$
R^2	0,76	0,80
Modelo de Difusão		
k_1	$-2{,}9380 \times 10^{4}$	$-2{,}8360 \times 10^{4}$
k_2	2,7040	2,6365
b	$43{,}60 \times 10^{-6}$	$48{,}42 \times 10^{-6}$

A correlação entre os valores previstos pela relação (5) e o número acumulado de adotadores observados no período em estudo foi bastante elevado, da ordem de 0,99, indicando, pois, boas previsões.

Quando se considera os dois períodos de estimação, podemos notar uma estabilidade no valor dos parâmetros, de tal maneira que podemos afirmar que o modelo dinâmico generalizado mostrou-se bastante satisfatório no caso em estudo.

CONCLUSÃO

O desenvolvimento recente dos modelos de difusão, alguns oriundos de outras áreas do conhecimento, proporciona ao especialista em comportamento das vendas de bens de consumo uma ferramenta de altíssima qualidade para a análise do mercado de tais produtos.

Os modelos, embora sejam bastante avançados, ainda apresentam algumas deficiências comportamentais, como a ausência de interação com outras inovações concorrentes, além da utilização apenas do tempo como padrão do processo de difusão.

De qualquer forma, tais modelos se constituem na ferramenta mais moderna e precisa para uma visão mais profunda do comportamento das vendas de bens de consumo, especialmente os duráveis.

Gostaríamos, ao terminar este trabalho, de deixar uma mensagem exposta pelo grande econometrista Henri Theil: "É preciso maturidade para entender que os modelos são criados para serem usados e não para serem acreditados".

ANEXO

Neste anexo mostraremos a solução matemática do modelo dinâmico generalizado da maneira que se encontra no apêndice do trabalho de Mahajan e Peterson (1978):

O modelo dinâmico generalizado é caracterizado pela equação diferencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Big(a + bN(t)\Big)\Big(f\big(S(t)\big) - N(t)\Big)$$

com as condições iniciais $N(t = t_o) = N_o$ e f $S(t_o) = f_o$

Rearranjando a relação acima, temos:

$$\frac{dN(t)}{\Big(a + bN(t)\Big)\Big(f(S(t) - N(t)\Big)} = dt \text{ ou}$$

$$\frac{bdN(t)}{a + bN(t)} + \frac{dN(t)}{\Big(f(S(t) - N(t)\Big)} =$$

$\Big(a + bf\ S(t)\Big)dt$, cuja integração leva a relação:

$$\ln\left[\frac{a + bN(t)}{a + bN_o}\right] - \ln\left[\frac{f(S(t)) - N(t)}{f_o - N_o}\right] =$$

$$= a(t - t_o) + bM(t)$$

onde:

$$M(t) = \int_{t_o}^{t} f(S(t))\,dt.$$

Da última relação, obtemos:

$$\frac{a + bN(t)}{f(S(t)) - N(t)} = \frac{a + b\,N_o}{f_o - N_o}\exp$$

$$[\,a(t - t_o) + b\,M(t)\,]\text{, ou}$$

$$N(t) = \frac{f(S(t)) - [\,a(f_0 - N_o)\,/}{1 + [\,b\,(f_o - N_o)\,/}$$

$$\frac{(a + bN_o)\,]\exp[\,-a(t - t_o) - bM(t)\,]}{(a + bN_o)\,]\exp[\,-a(t - t_o) - bM(t)\,]}$$

A relação prática utilizada no trabalho foi a seguinte ligação linear:

$$\bar{N}(t) = f(S(t)) = k_1 + k_2\,P(t) \text{ com}$$

$$P(t) = \frac{\overline{P}\,((1 - \exp[\,-(m_1 + m_2\overline{P})\,t\,]\,)}{1 + [\,m_2/m_1\,]\,\overline{P}\exp[\,-(m_1 + m_2\overline{P})\,t]}$$

agora

$$M(t) = \int_{t_o}^{t} f\,S(t)\,dt =$$

$$= k_1\,(t - t_o) + k_2\int_{t_o}^{t} P(t)\,dt\text{, mas}$$

$$\int_{t_o}^{t} P(t)dt = \int_{t_o}^{t}$$

$$\frac{\overline{P}\left(1 - \exp[\,-(m_1 + m_2\overline{P})\,t\,]\right)}{1 + [\,m_2/m_1\,]\,\overline{P}\exp[\,-(m_1 + m_2\,\overline{P})\,t\,]}\,dt$$

$$= \int_{t_o}^{t}\frac{\overline{P}\exp[\,(m_1 + m_2\overline{P}\,t)\,]}{m_2\,\overline{P}/m_1 + \exp[\,(m_1 + m_2\,\overline{P}\,]}\,dt$$

$$-\int_{t_o}^{t}\frac{\overline{P}\exp[\,-(m_1 + m_2\,\overline{P})\,t\,]}{1 + [m_2/m_1]\,\overline{P}\,\grave{e}xp[-(m_1 + m_2\,\overline{P})\,t\,]}\,dt$$

Para podermos integrar estas relações, usamos as funções auxiliares:

$$Y(t) = m_2\,\overline{P}/m_1 + \exp[\,(m_1 + m_2\overline{P})\,t\,]\text{ e}$$

$$Z(t) = 1 + [\,m_2/m_1\,]\,\overline{P}\exp$$

$$[\,-(m_1 + m_2\overline{P})\,t\,] = Z(t).$$

assim,

$$\int_{t_o}^{t} P(t)dt = \int_{Y(t_o)}^{Y(t)}\frac{\overline{P}}{(m_1 + m_2\overline{P})}$$

$$\frac{dY}{Y(t)} + \int_{Z(t_o)}^{Z(t)}\frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2\overline{P})}\frac{dZ}{Z(t)}$$

$$= \frac{\overline{P}}{m_1 + m_2\,\overline{P}}\ln\left[\frac{Y(t)}{Y(t_o)}\right] +$$

$$+ \frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2\overline{P})}\ln\left[\frac{Z(t)}{Z(t_o)}\right]$$

$$= \ln\left(\left[\frac{Y(t)}{Y(t_o)}\right]^{\beta_1}\left[\frac{Z(t)}{Z(t_o)}\right]^{\beta_2}\right)\text{ onde,}$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{P}}{(m_1 + m_2\,\overline{P})}\text{ e}$$

$$\beta_2 = \frac{m_1}{(m_2\,(m_1 + m_2\,\overline{P})}$$

Portanto,

$$M(t) = k_1\,(t - t_o) + k_2\,\ln$$

$$\left(\left[\frac{Y(t)}{Y(t_o)}\right]^{\beta_1}\left[\frac{Z(t)}{Z(t_o)}\right]^{\beta_2}\right)$$

Supondo $t_o = 0$, $Y(t_o) = Z(t_o) = 1 + [m_2\overline{P}/m_1]$ e desde que $\beta_1 + \beta_2 = 1/m_2$ e para qualquer t,

$Y(t)/Z(t) = \exp[(m_1 + m_2\overline{P})t]$, temos uma relação simplificada para $M(t) = k_1 t + k_2 [\frac{1}{m_2} \ln Z(t) + \overline{P}t - \frac{1}{m_2} \ln (1 + \frac{m_2 \overline{P}}{m_1})]$

Substituindo M(t) na expressão fundamental geradora do modelo N(t); temos o modelo totalmente pronto para as suas utilizações práticas.

BIBLIOGRAFIA

BASS, F. M. – A new product growht model for consumer durabels. *Management Science*, Vol. 15, jan. 1969.

BERNHARDT, I. & MACKENZIE, K. D. – Some problems in using diffusion models for new products. *Management Science*, Vol. 10, Oct. 1972.

FONSECA, J. S. & MAZZON, J. A. – Análise temporal das vendas de televisores preto e branco ao mercado brasileiro. *Revista de Administração*, Vol. 13(4), out/dez. 1978.

FOURT, L. A. & WOODLOCK, J. W. – Early prediction of market sucess for new grocery products. *Journal of Marketing*, Vol. 25, 1960.

MAHAJAN, V. & PETERSON, R. A. – Innovation diffusion in a dynamic potencial adopter population. *Management Science*, Vol. 24, Feb. 1977.

MAHAJAN, V. & SCHOEMAN, M. – Generalized Model for the time patern of the diffusion process. IEE Trans. Engineering Management, Vol. 24, Feb. 1977.

PERLON, E. C. – An introduction to mathematical ecology. Wiley Interscience, New York, 1969.

ROGERS, E. M. & SHOEMAKER, F. – Communication of inovation. New York, The Free Press, 1971.

TAKAOKA, H.; MATHIAS, W. F.; MUCCILLO NETTO, J. e FONSECA, J. S. – Aplicação de um modelo de crescimento para novos produtos. *Revista de Administração*, IA/USP, Vol. 13(3), jul/set. 1978.