

Antonio R.N. Muscat
Marcos Cortez Campomar
Ruy Aguiar da Silva Leme

Professor do Departamento de
Administração da FEA e POLI/USP

Professor Assistente do
Departamento de
Administração da FEA-USP

Professor Catedrático do
Departamento de Administração
da FEA e POLI/USP

UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DA DECISÃO AO ESTUDO DA LOCALIZAÇÃO INDUSTRIAL

63

INTRODUÇÃO

Na teoria da localização industrial a hipótese básica é bastante simples e diz que a empresa escolhe entre as possíveis localizações, aquela que lhe dá maior lucro (Leme, 1965).

Quando se procura adaptar a teoria à realidade encontra-se sérias dificuldades devido à incerteza sobre os possíveis elementos que irão determinar a maximização deste lucro, considerando principalmente que o horizonte de tempo relevante para

o cálculo deste lucro é de 20 ou 30 anos, tempo mínimo em que a indústria deve permanecer na nova localização.

Neste trabalho procura-se apresentar um modelo de localização e a forma clássica de tratá-lo, introduzindo a seguir uma forma de tratamento que envolve incerteza em uma das variáveis.

Como o intuito é de ilustrar o processo, é apresentado um exemplo, tratado primeiro pela forma clássica e depois pela forma que implica em incerteza na variável tarifa de transporte.

**TRANSPORTES VINCULADOS
A GRAFOS (ÁRVORES).
Método Clássico de Resolução
(Determinação da Localização
Ótima)**

No processo de localização de uma indústria podemos dizer que, quando se procura minimizar o custo do transporte das matérias-primas e do produto acabado, com o objetivo de maximizar o lucro, está sendo procurada uma localização determinada pelo transporte, isto é, "Localização Orientada pelo Transporte" (L.O.T.).

64

Na adaptação do modelo de Weber pelo Prof. Ruy Leme (Leme, 1965), encontramos um modelo de transportes vinculados a grafos, ou seja, as localidades onde se situam as diferentes fontes de matéria-prima e os diferentes mercados para o produto acabado são interligados por diferentes vias de transporte (redes) já existentes.

Nesta adaptação toma-se como conhecidas as quantidades de matéria-prima a serem utilizadas, a possível distribuição percentual pelos mercados do produto acabado, e o valor das tarifas para transporte tanto da matéria-prima como do produto acabado.

Quando se tem um modelo com as características descritas acima, um método clássico de resolução do problema (determinação da localização ótima da indústria) é chamado de "método dos cortes".

O método dos cortes consiste em fazer-se cortes nas redes de transporte, que ligam as fonte de matéria-prima e os mercados, atribuindo-se pesos à esquerda e à direita dos cortes com base no custo por km do material a ser transportado.

A orientação para a localização ideal é dada pela maior força de atração, representada pelo maior resultado da soma dos pesos de cada lado dos cortes.

Este método é utilizável somente quando o grafo for reduzido a uma árvore, que é o caso em que o grafo não contenha circuitos, já que, quando há circuitos, surgem problemas de resolução que impedem sua aplicação (a não ser para certos casos particulares).

**O MODELO SOB CONDIÇÕES
DE INCERTEZA
Uso de Critérios de Valor
e de Utilidade**

No modelo visto é necessário que se tenha conhecimento "a priori" sobre os diversos elementos que o compõe (tarifas, quantidade de matéria-prima e mercados).

Em uma situação real, os problemas de localização implicam, muitas vezes, em desconhecimento sobre estes elementos, já que eles são frutos de condições ambientais incertas.

Assim é que a incerteza sobre o resultado das escolhas efetuadas é uma forte característica dos problemas relacionados com decisões de localização. O grau e a natureza desta incerteza podem variar consideravelmente de uma situação para outra. De uma maneira geral, elas estão ligadas à eficácia do sistema de previsão posto a funcionar, ao processo de identificação dos estados da natureza e às características do meio ambiente, no seio do qual os problemas de decisão serão posicionados.

Tradicionalmente, as formas de incerteza capazes de afetar as conseqüências das linhas ou cursos de ação considerados são divididas em quatro categorias. Pode-se falar,

então, em universo certo (ou subjetivamente certo), em universo aleatório, em universo antagônico e em universo indeterminado. Em cada um destes universos é possível descrever o tipo de incerteza que os caracteriza, os problemas que os envolvem e o critério de decisão a utilizar em cada caso.

A decisão enfrentada por qualquer tomador de decisão pode ser descrita como, a escolha de um entre pelo menos dois cursos de ação que estão relacionados, através de uma função, com certas condições ambientais (chamadas estados da natureza), as quais estão fora do seu controle. Tais condições afetam os cursos de ação de tal forma que a interação entre eles produza um único resultado. Simbolicamente:

65

$$V_{ij} = F(A_i, E_j)$$

onde, A_i = i -ésimo curso de ação disponível para o tomador de decisão.

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

E_j = j -ésimo estado da natureza.

$$(j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

V_{ij} = o valor do resultado da interação do i -ésimo curso de ação e o j -ésimo estado da natureza (também chamado conseqüência).

$F(.)$ = relação funcional entre as variáveis A_i e E_j , que produz o resultado V_{ij} .

Este modelo geral pode ser usado para formular qualquer tipo de problema de decisão, havendo, entretanto, duas dificuldades associadas ao uso do modelo. Primeiro, cada V_{ij} deve ser definido precisamente (quantificado) e para isto é necessário definir tanto uma medida de valor como uma especificação da relação funcional entre cada V_{ij} e a interação de cada A_i e E_j .

A teoria econômica postula uma medida ideal do valor como sendo a utilidade (quantidade de satisfação resultante de um específico V_{ij}), entretanto não há um padrão empírico que permita medir utilidade que seja universalmente aceito, além do que, comparações temporais e interpessoais de escalas de utilidade são particularmente difíceis. Muitos dos problemas de decisão, entretanto, podem ser resolvidos em termos de um padrão que tem ampla aceitação, que é a unidade monetária.

Com este padrão é possível calcular-se um retorno (resultado) monetário associado a um específico V_{ij} .

No contexto deste trabalho a consequência da interação de A_i e E_j será medida em termos de unidades monetárias no ítem Introdução no Modelo de Incerteza quanto às Tarifas e através de uma medida de utilidade no ítem Introdução no Modelo de Curvas de Utilidade não-lineares.

Uma outra dificuldade no processo de decisão é que depois que os valores das consequências (resultados) foram determinados deve ser ado-

tado um critério para determinação do curso de ação preferido.

Por este fato, deve ser procurado um modelo de decisão para orientar o tomador de decisão no processo de escolha entre os cursos de ação viáveis.

Na procura deste modelo temos, que o conhecimento do ambiente onde será tomada a decisão pode ser de três tipos: na certeza, com risco e na incerteza.

O ambiente na certeza significa que o tomador de decisão sabe qual o estado da natureza que irá ocorrer.

Muitas vezes, entretanto, o tomador de decisão não tem um conhecimento certo do estado da natureza que irá vigorar no futuro, devendo, por isto, tentar prevê-lo.

Se ele tiver conhecimento sobre a probabilidade de ocorrência de cada um dos vários estados da natureza, ele poderá usar os valores esperados dos vários cursos de ação a fim de determinar que decisão tomar. Esta decisão caracteriza-se como tomada de decisão sob risco.

A decisão com risco requer que o administrador saiba (ou seja capaz de estimar com bastante confiabilidade) a verdadeira probabilidade de ocorrência de cada estado da natureza.

A decisão na incerteza refere-se à situação onde não há possibilidade de

se determinar, objetivamente, a probabilidade de ocorrência dos estados da natureza. Neste caso o critério de decisão torna-se de particular importância.

Entre os vários critérios possíveis podemos citar os seguintes:

a. critérios provenientes de abordagens da teoria dos jogos (tratam os estados da natureza como um oponente a ser derrotado pela estratégia): **Maximax**, **Maximin** e **Arrependimento Minimax**.

b. critérios probabilísticos (associaam probabilidades aos diversos estados da natureza): **Laplace**, **Valor monetário esperado** e **Perda de oportunidade esperada**.

Não é escopo deste trabalho detalhar e analisar os diversos critérios, os quais são apresentados somente para introdução dos que vão ser utilizados, qual seja o critério de valor monetário esperado e, após este, o de utilidade esperada.

Estes critérios são utilizados no exemplo a ser apresentado porque são adotadas probabilidades subjetivas para avaliar a possibilidade de ocorrência dos diversos estados da natureza, tendo-se como base a análise bayesiana, o que permite o uso de valores esperados como critério de decisão.

O valor monetário esperado é calculado através da esperança matemática, dando um resultado para

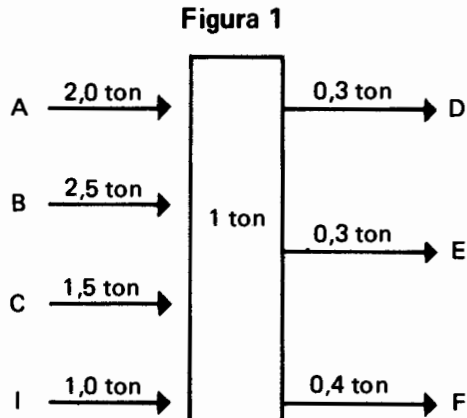
cada curso de ação (A_i), devendo ser escolhido o curso de ação ótimo.

FORMULAÇÃO DE UM EXEMPLO

O exemplo da Fig. 1 servirá para o desenvolvimento de todo este trabalho.

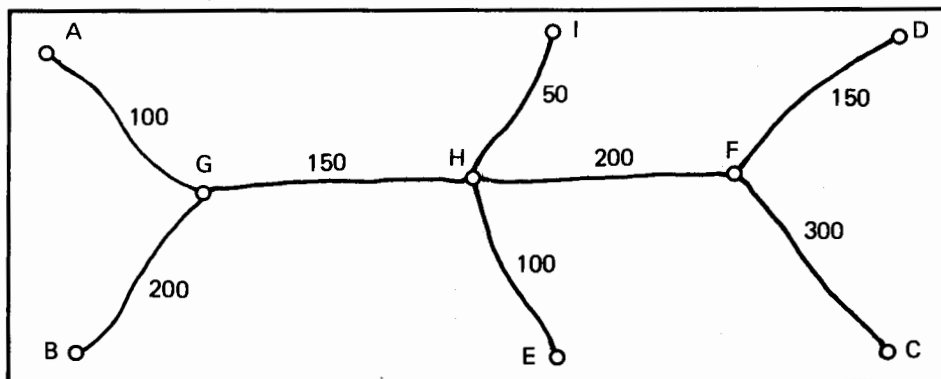
Consideramos uma fábrica que emprega quatro tipos diferentes de matéria-prima provenientes dos mercados A, B, C e I. O produto fabricado será distribuído para os seguintes centros consumidores: D, E e F. Na Fig. 1 damos para cada matéria-prima, a quantidade necessária para se produzir 1 tonelada de produto acabado e como esta produção se distribui percentualmente para os diversos mercados:

67



A posição das fontes e dos centros consumidores é dada na árvore de localização (Fig. 2):

Figura 2

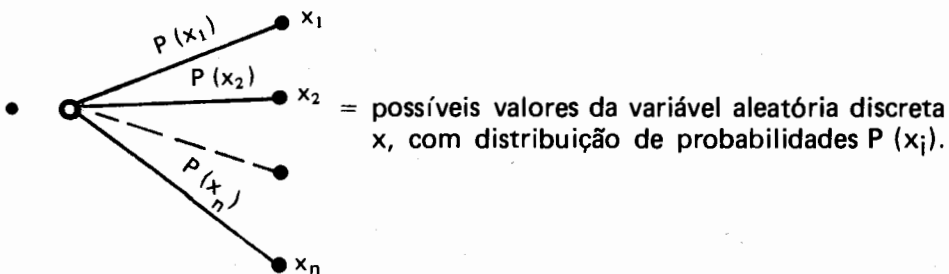
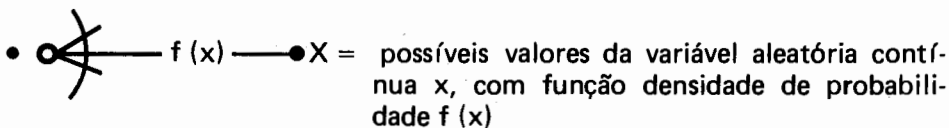


Observação: os números indicam as distâncias entre as localidades, expressas em km.

Notação para o desenvolvimento do exemplo:

68

- letras maiúsculas (A, B, ...) = localizações alternativas.
- LOT = localização orientada pelo transporte
- □ = ponto, numa árvore de decisão, em que o agente racional decide
- ○ = ponto, numa árvore de decisão, em que a natureza decide
- $E(x)$ ou $\langle x \rangle$ = esperança matemática da variável aleatória x
- $E(x/g)$ ou $\langle x/g \rangle$ = esperança de x condicionada ao estado de informação g



- \tilde{x} = equivalente certo de uma loteria
- $u(x)$ = utilidade do resultado x

As tarifas, em Cr\$/{(ton. x km.)}, valem:

- (a) para matérias-primas : $a = 2,0$
- (b) para produtos acabados: $b = 10,0$

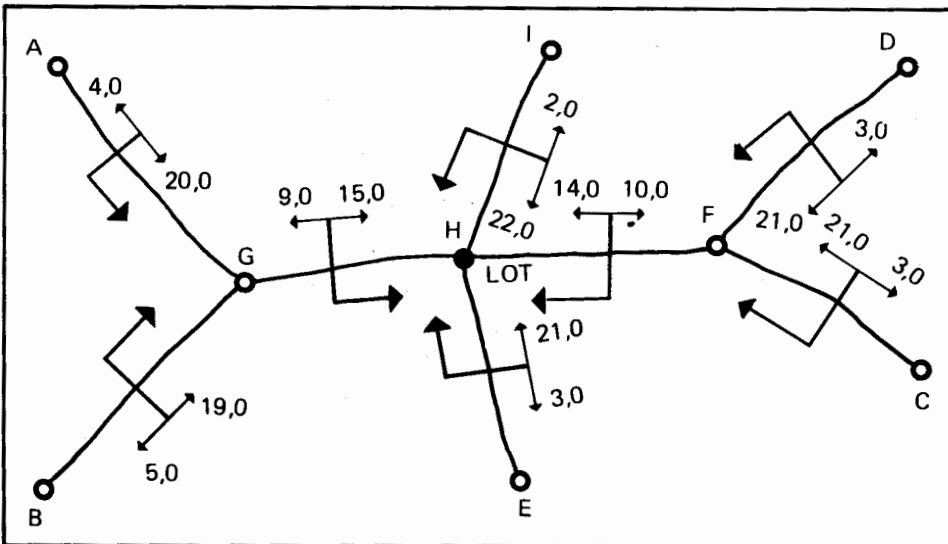
Todos os outros dados necessários ao desenvolvimento do trabalho, serão apresentados à medida em que forem utilizados.

**SOLUÇÃO DO EXEMPLO
SEGUNDO O MÉTODO
CLÁSSICO**

O método de solução mais conhecido, e também mais prático, para o problema do item anterior é o chamado "Método dos Cortes". Na árvore (Fig. 3) empregamos este método e a cada corte associamos a soma de pesos à esquerda e à direita do corte. A resultante de tais pesos é indicada pela flecha dupla, que mostra em qual sentido se encontra a LOT.

**GRÁFICO DE ACRÉSCIMO
DE CUSTO**

Figura 3



Os pesos empregados para a determinação da LOT são dados na Tab. 1.

Tabela 1

	tarifas Cr\$ / (ton. x km)	toneladas por unid. de prod.	Pesos (π_i)
A	2,0	2,0	4,0
B	2,0	2,5	5,0
C	2,0	1,5	3,0
D	10,0	0,3	3,0
E	10,0	0,3	3,0
F	10,0	0,4	4,0
I	2,0	1,0	2,0
		SOMA	24,0

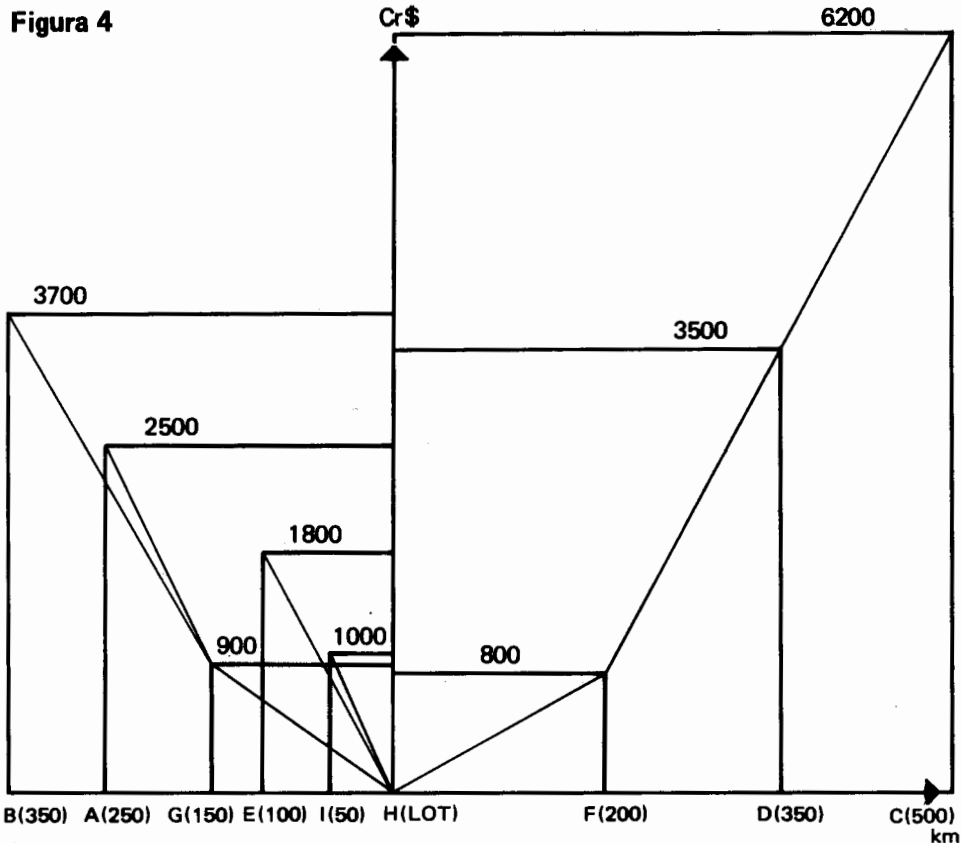
70

Assim, pelo emprego do método dos cortes, determinados a LOT, que no nosso exemplo é o ponto H.

Na maioria das decisões de localização industrial, o custo do transporte tem papel importante, mas nem sempre é o único tipo de custo em jogo. Para que se possa levar em consideração outros custos, como por exemplo: mão-de-obra,

impostos, aluguel, energia, etc., e ainda para testar a sensibilidade da estrutura de dados, podemos construir o gráfico de acréscimo de custo, que nos diz em quanto aumentará o custo de transporte referente a uma tonelada de produto quando nos afastamos da LOT e nos dirigimos para as outras localidades da árvore de localização. Abaixo, apresentamos o gráfico de acréscimo de custo, construído a partir dos cortes efetuados na fig. 3:

Figura 4



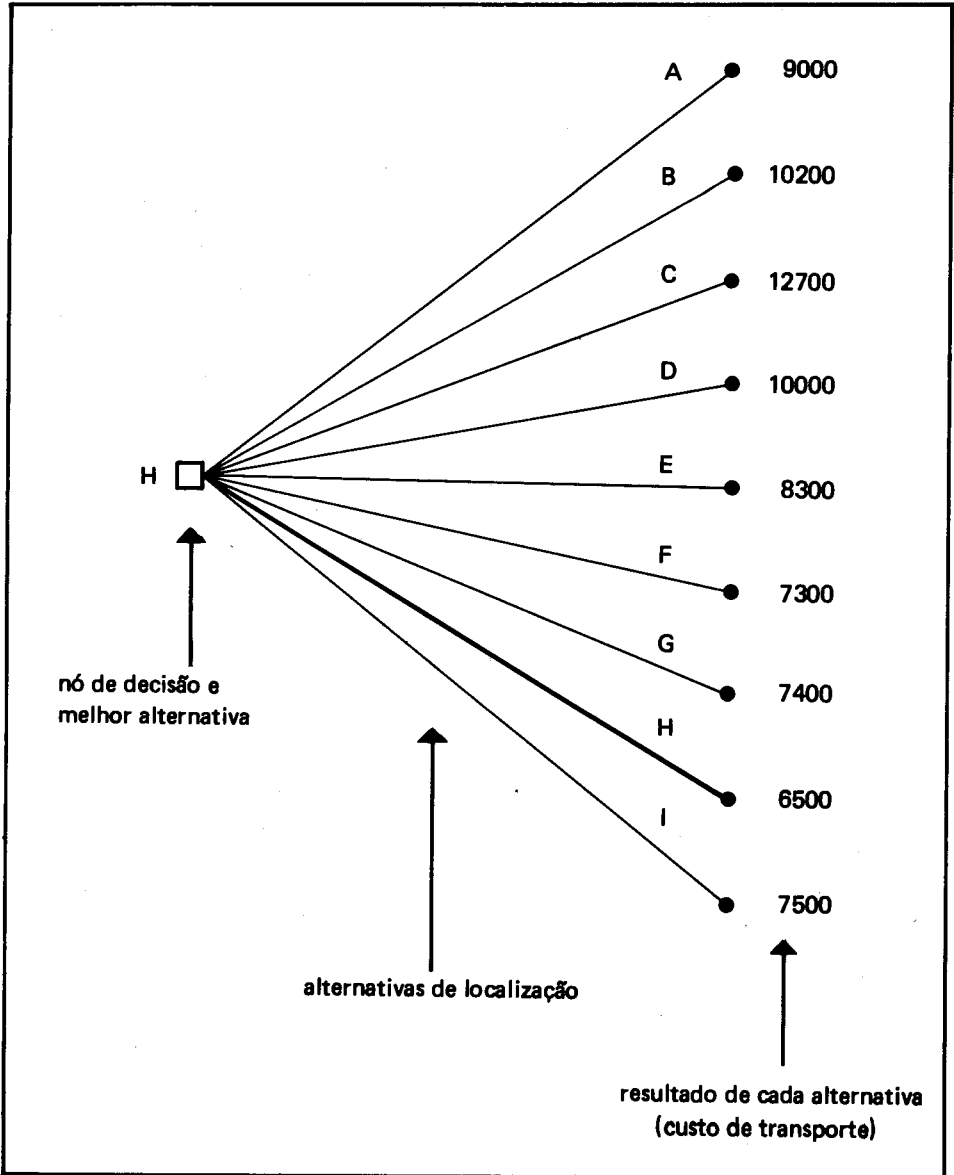
**INTRODUÇÃO, NO MODELO,
DE INCERTEZA QUANTO
ÀS TARIFAS.
Resolução do Exemplo
com Incerteza**

Conforme o que já foi salientado no item "O Modelo sob Condições de Incerteza", o empresário em

geral não tem pleno conhecimento de diversos fatores que o modelo em estudo admite como dados e constantes. Está fora do escopo deste trabalho a introdução da incerteza em todos os dados do problema de localização de fábricas em transportes vinculados a grafos, no entanto, para que se sinta o efeito de tal modificação, abordaremos o caso em que há incerteza na tarifa correspondente ao transporte de matérias-primas.

O problema de localização resolvido no ítem "Solução do Exemplo Segundo o Método Clássico" pode ser esquematizado na árvore de decisão da Fig. 5:

Figura 5



72

nó de decisão e
melhor alternativa

alternativas de localização

resultado de cada alternativa
(custo de transporte)

Na árvore de decisão, foram incluídos os pontos G e H que, embora não sejam mercados, são entroncamentos. Em uma árvore de localização, a LOT pode se achar em um dos mercados (fornecedor ou consumidor), em um dos entroncamentos, ou entre dois pontos que tenham o mesmo custo de transporte.

Como não há incerteza envolvida, este tipo de problema se enquadra nos casos chamados de **decisão sob certeza** em Análise da Decisão.

As tarifas até então foram assumidas como determinísticas, porém, devido à concorrência entre as empresas de transporte (mesmo estando seus preços sujeitos ao controle governamental há uma certa guerra de preços), é difícil prever,

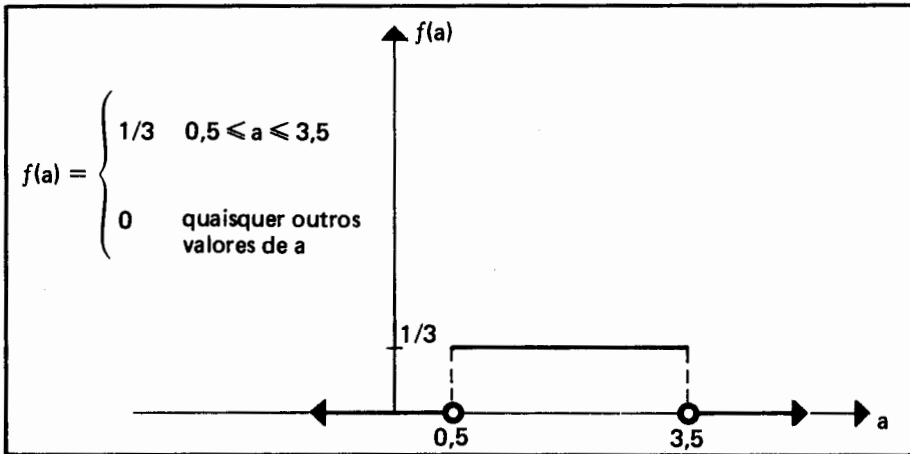
“a priori”, qual será a tarifa para cada um dos insumos e para o produto final, antes de se fazer uma pesquisa detalhada do mercado. Mesmo que esta pesquisa fosse realizada, decorre um razoável período de tempo desde os estudos de localização da fábrica até sua instalação e início de operações. Tudo isto nos leva à conclusão de que, as tarifas devam ser tratadas como variáveis aleatórias e não como valores determinísticos.

Assim; para o desenvolvimento do nosso exemplo, suponhamos que a tarifa para as matérias-primas seja conhecida apenas probabilisticamente.

Suponhamos que a distribuição para a tarifa (a) das matérias-primas, estabelecida subjetivamente, seja:

73

Figura 6

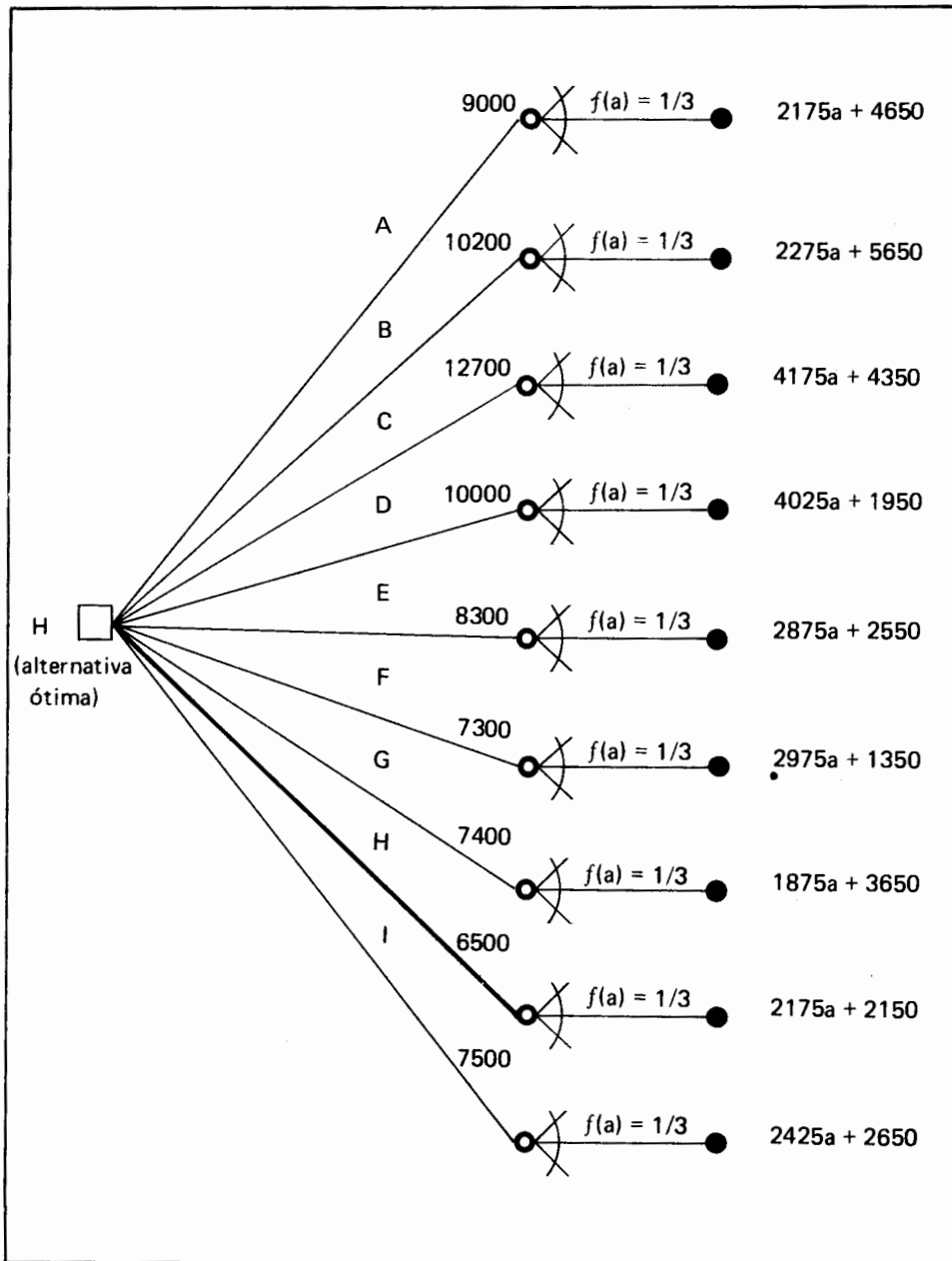


Notemos que desta forma a média de a, i.e., $E(a) = 2$.

Agora, a árvore de decisão assume o seguinte aspecto:

Figura 7

74



Para atribuímos o resultado de cada localização alternativa, devemos verificar o que ocorre com o custo total de transporte, referente a uma tonelada de produto acabado, para todas as localizações

alternativas. Sendo o custo total de transporte uma função de "a" do tipo $C_x(a) = K_x + R_x a$, onde x é a localização em estudo, damos na Tabela 2 os valores de K_x e R_x para todas as alternativas.

Tabela 2

X	K_x	R_x	$C_x(a)$ em Cr\$	$\langle C_x(a) \rangle$ em Cr\$
A	4650	2175	$2175a + 4650$	9000
B	5650	2275	$2275a + 5650$	10200
C	4350	4175	$4175a + 4350$	12700
D	1950	4025	$4025a + 1950$	10000
E	2550	2875	$2875a + 2550$	8300
F	1350	2975	$2975a + 1350$	7300
G	3650	1875	$1875a + 3650$	7400
H	2150	2175	$2175a + 2150$	6500
I	2650	2425	$2425a + 2650$	7500

75

Agora, para determinar a localização ótima, devemos calcular $\langle C_x(a) \rangle$ para todos os x e determinarmos x tal que corresponda ao $\min \langle C_x(a) \rangle$

Mas:

$$\langle C_x(a) \rangle = \langle K_x + R_x a \rangle = \langle K_x \rangle + \langle R_x a \rangle = K_x + R_x \langle a \rangle$$

Como $E(a) = \langle a \rangle = 2$, temos

$$\langle C_x(a) \rangle = K_x + 2R_x$$

Na tabela 2, na última coluna, indicamos os valores de $\langle C_x(a) \rangle$ para todas as alternativas de localização. Como vemos, os valores de $\langle C_x(a) \rangle$ para todos os x , são exatamente os mesmos que aqueles obtidos na fig. 5 e novamente a alternativa H é a melhor.

A igualdade verificada se deve ao fato da média de "a" ser igual a 2, valor adotado em condições de certeza.

Devido ao que explicamos acima, não necessitamos o custo total de transporte para cada alternativa, para que se decida a localização ótima em condições de incerteza,

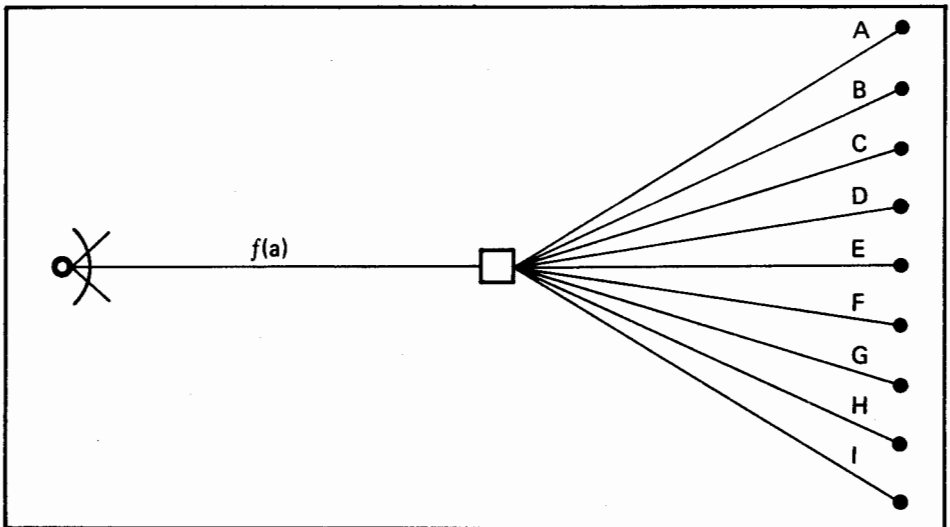
mas tão somente o resultado do método dos cortes.

Suponhamos agora que possamos obter clarividência com relação à tarifa "a", por exemplo, através de uma tomada de preços das transportadoras, analisando seu comportamento passado e realizando projeções das tarifas, ou ainda, contratando um indivíduo que informará a tarifa com exatidão.

Nesta situação, qual será o valor da informação adicional, isto é, até quanto devemos pagar para obter esta informação? Para obtermos este valor, construímos a árvore de decisão (Fig. 8).

Figura 8

76



Para cada valor de "a", precisamos escolher a melhor decisão (A, B, C, ...). Porém, para sabermos qual a melhor localização da fábrica para

cada valor de "a", necessitamos analisar a **sensibilidade** do problema de localização às variações na tarifa "a".

Tal análise de sensibilidade é feita de modo bastante fácil se construímos os gráficos $C_X(a) = K_X + R_X a$,

para todos os vértices da árvore de localização. A figura 9 apresenta tais gráficos.

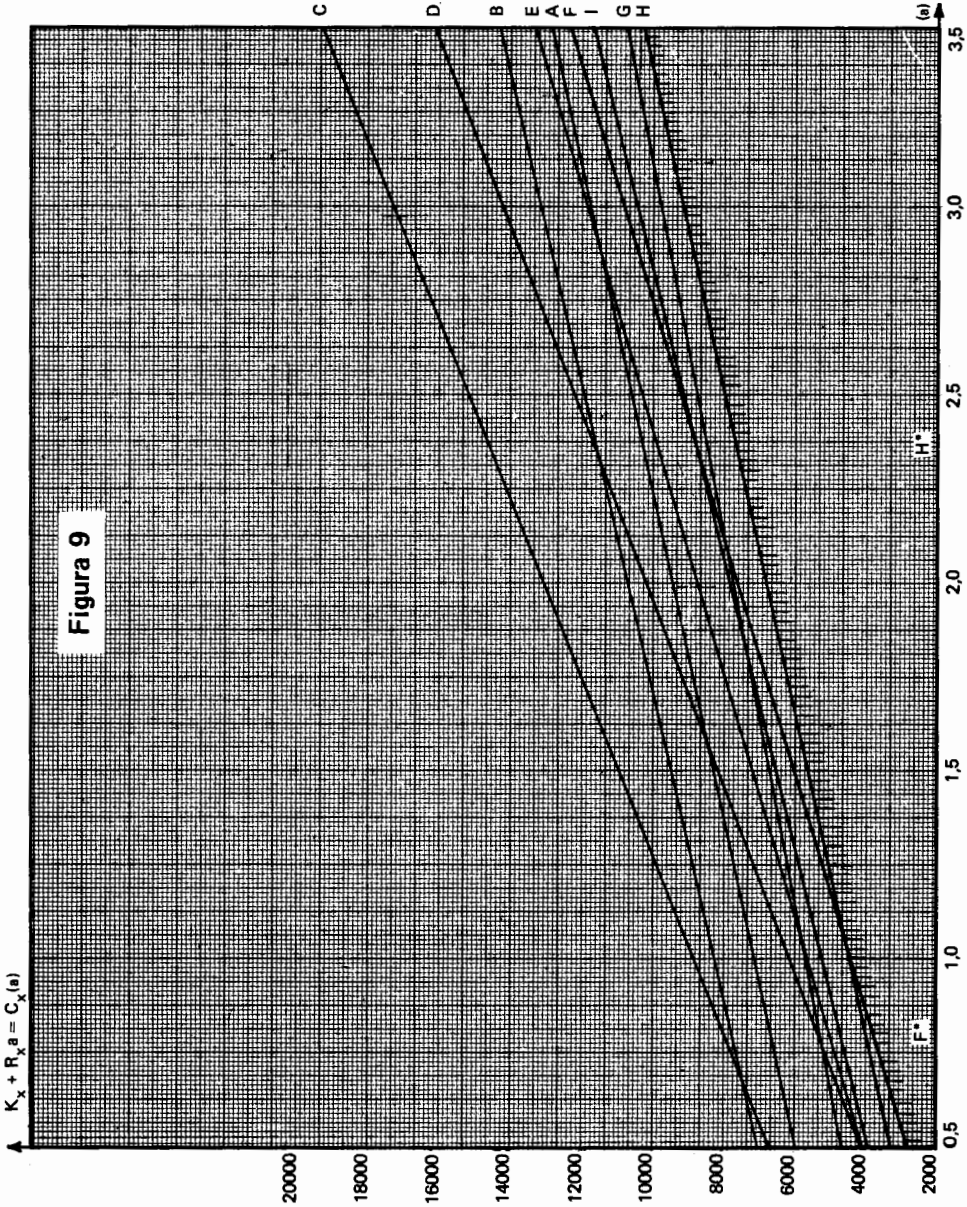


Figura 9

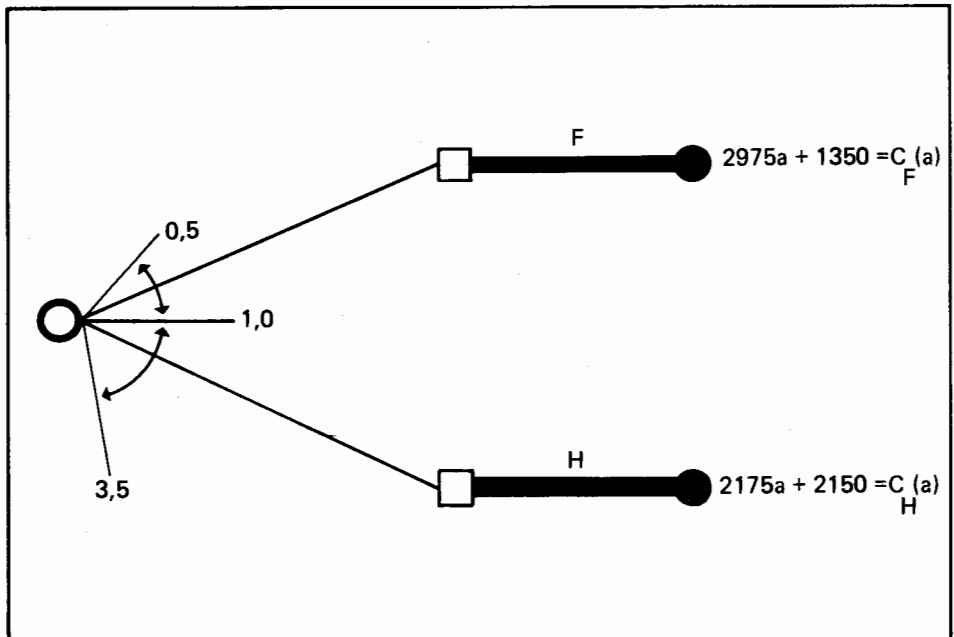
Da análise do gráfico, tiramos a seguinte tabela de decisão:

Tabela 3

valores de "a"	decisão ótima
$0,5 \leq a < 1$	F
$a = 1$	F ou H
$1 < a \leq 3,5$	H

A árvore de decisão se reduz a:

Figura 10



A esperança do custo total de transporte com clarividência em relação a "a", será:

$$\langle C/Cla \rangle = \left\{ \int_{0,5}^{1,0} (2975a + 1350) \frac{1}{3} da + \int_{1,0}^{3,5} (2175a + 2150) \frac{1}{3} da \right\}$$

$$\langle C/Cla \rangle = \text{Cr\$ } 6466,67$$

No caso anterior, em que não tínhamos informação alguma em relação a "a", a expectativa do custo para a melhor alternativa era:

$$\langle C \rangle = \text{Cr\$ } 6500,00$$

Portanto, vale a pena pagar pela informação de um clarividente até $\langle C \rangle$ - $\langle C/Cla \rangle = 6500 - 6466,67 =$

Cr\$ 33,33 = **valor da informação perfeita.**

Agora, supondo que só podemos obter clarividência parcial, isto é, com probabilidade (p), será fornecida informação perfeita e com probabilidade (1 - p), teremos que decidir sem informação alguma. A esperança do custo total será:

79

$$\langle C/Cla(p) \rangle = p \langle C/Cla \rangle + (1-p) \langle C \rangle = p. 6466,67 + (1-p) 6500$$

Supondo $p = 0,8 \Rightarrow \langle C/Cla(p) \rangle = \text{Cr\$ } 6473,34$

O valor da informação adicional será:

$$\langle C \rangle - \langle C/Cla(p) \rangle = 6500 - 6473,34 = \text{Cr\$ } 26,66$$

Na prática, porém, nem o clarividente e nem o vidente parcial existem, mas a introdução do conceito de valor da informação é vital para o que pretendemos desenvolver a seguir:

Embora não existam aqueles dois personagens, há um terceiro, bastante real, ao qual o empresário costuma recorrer — o consultor, que através da sua experiência e conhecimentos técnicos, pode fornecer boas informações no que concerne à localização da fábrica, embora às vezes possa falhar.

No nosso exemplo, assumimos que o empresário possa recorrer ao consultor para obter informações sobre a tarifa "a". Admitamos que respostas possíveis do consultor sejam:

a_1 — "a tarifa está entre 0,5 e 1,0".

a_2 — "a tarifa está entre 1,0 e 3,5".

Estudando o passado do consultor, verifica-se que ele acerta em 96% das vezes em que ocorre a_1 e 98% das vezes em que ocorre a_2 (*), isto é:

$$P(a_1/0,5 \leq a \leq 1,0) = 0,96 \Rightarrow P(a_2/0,5 \leq a \leq 1,0) = 0,04$$

$$P(a_2/1,0 \leq a \leq 3,5) = 0,98 \Rightarrow P(a_1/1,0 \leq a \leq 3,5) = 0,02$$

80

Denotando por $A_1 = \{ 0,5 \leq a \leq 1,0 \}$ e $A_2 = \{ 1,0 \leq a \leq 3,5 \}$,

temos:

$$P(a_1/A_1) = 0,96 ; P(a_2/A_1) = 0,04 ; P(a_2/A_2) = 0,98 \text{ e}$$

$$P(a_1/A_2) = 0,02.$$

Agora devemos construir a árvore de decisão. Devemos, inicialmente, estabelecer quais as alternativas de localização estão disponíveis ao empresário. Poderíamos simplesmente colocar as seguintes:

"F se a_1 e H se a_2 "

(*) Se não há dados passados, atribui-se as probabilidades acima a partir das informações disponíveis, subjetivamente.

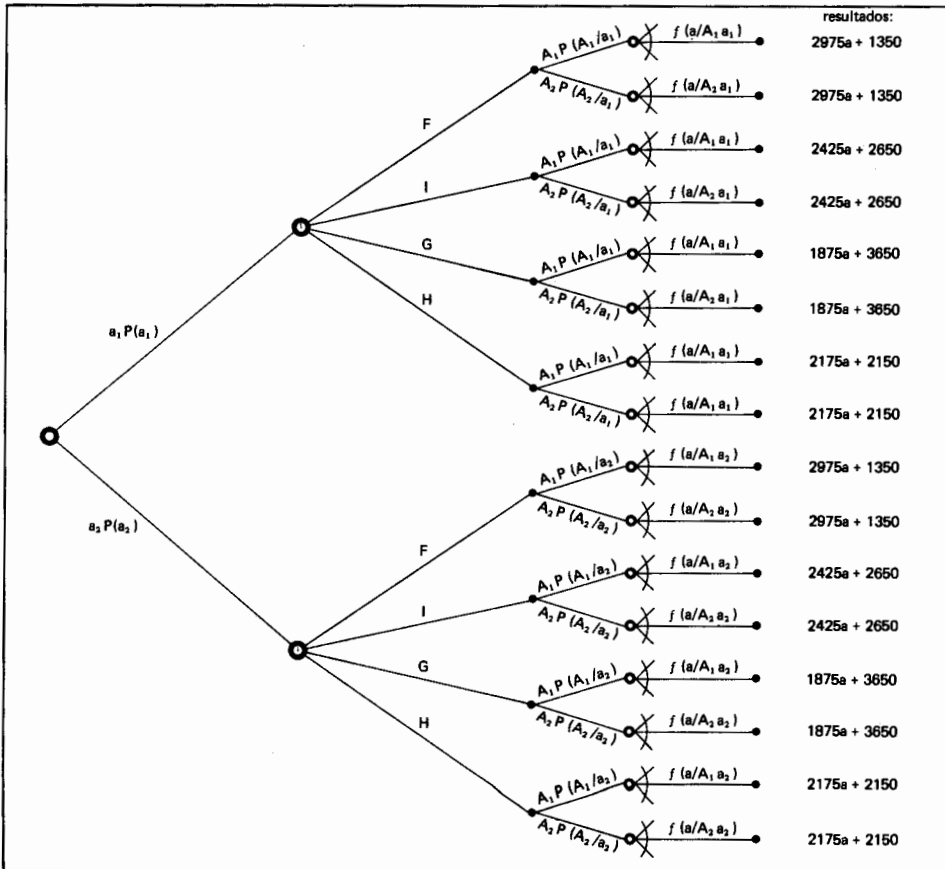
No entanto, devemos notar que, agora a informação fornecida pelo consultor é uma **informação imperfeita**, isto é, sujeita a erros. Quando o consultor disser que a tarifa será a_1 e ele estiver acertando, então, sem dúvida alguma a melhor alternativa será F, mas no caso de dizer que a tarifa será a_1 e estiver errando, então, para determinadas faixas de a , F será dominada por outras

alternativas (ver fig. 9) que são: I, H e G. Analogamente, quando ele disser que é a_2 e estiver certo, a melhor decisão é H, e se estiver errado, H é dominada por F. Assim, analisaremos quatro alternativas em cada nó de decisão: F, G, H e I.

No final do ítem Introdução no Modelo de Curvas de Utilidade não-lineares, mostramos que para o caso particular que estamos analisando, é indiferente considerar I e G, ou não.

A árvore de decisão fica:

Figura 11



Agora, apresentaremos os cálculos necessários para a solução do problema:

Para determinarmos $P(a_1)$ e $P(a_2)$, aplicamos o teorema da probabilidade total:

$$P(a_i) = P(A_1) \cdot P(a_i/A_1) + P(A_2) \cdot P(a_i/A_2); i = 1,2$$

$$P(A_1) = P(0,5 \leq a \leq 1,0) = \int_{0,5}^{1,0} 1/3 da = 1/6$$

$$P(A_2) = P(1,0 \leq a \leq 3,5) = \int_{1,0}^{3,5} 1/3 da = 5/6$$

$$\begin{cases} P(a_1) = 1/6 \times 0,96 + 5/6 \times 0,02 = 0,1767 \\ P(a_2) = 1 - P(a_1) = 0,8233 \end{cases}$$

Após isto, calculamos $P(A_1/a_1)$; $P(A_2/a_1)$; $P(A_1/a_2)$ e $P(A_2/a_2)$.

82

Do teorema de Bayes, temos:

$$P(X/Y) = \frac{P(X) \cdot P(Y/X)}{P(Y)}$$

Assim:

$$P(A_1/a_1) = \frac{P(A_1) \cdot P(a_1/A_1)}{P(a_1)} = \frac{1/6 \times 0,96}{0,1767} = 0,9055$$

$$P(A_1/a_2) = \frac{P(A_1) \cdot P(a_2/A_1)}{P(a_2)} = \frac{1/6 \times 0,04}{0,8233} = 0,0081$$

Portanto,

$$P(A_2/a_1) = 1 - 0,9055 = 0,0945$$

$$P(A_2/a_2) = 1 - 0,0081 = 0,9919$$

Finalmente devemos calcular: $f(a/A_1 a_1)$; $f(a/A_2 a_1)$; $f(a/A_1 a_2)$ e $f(a/A_2 a_2)$.

O teorema de Bayes assume a forma:

$$f(X/Y) = \frac{f(X) \cdot P(Y/X)}{P(Y)}$$

Temos:

$$f(a/A_1) = f(a/0,5 \leq a \leq 1) = \frac{f(a) \cdot P(A_1/a)}{P(A_1)}$$

$$\text{Para } 0,5 \leq a \leq 1,0 \quad f(a/A_1) = \frac{1/3 \times 1}{1/6} = 2$$

$$\text{Para } 1,0 < a < 3,5 \quad f(a/A_1) = 0$$

Analogamente, determinamos:

$$f(a/A_2) = 2/5 \text{ para } 1,0 < a < 3,5 \text{ e}$$

$$f(a/A_2) = 0 \text{ para } 0,5 \leq a \leq 1,0$$

83

Para calcular $f(a/A_1 a_1)$, fazemos:

$$f(a/A_1 a_1) = \frac{f(a) \cdot P(A_1/a) \cdot P(a_1/A_1 a)}{P(A_1) \cdot P(a_1/A_1)}$$

Porém, observando que:

$$A_1 = \{ 0,5 \leq a \leq 1,0 \} \Rightarrow A_1 \cap a \equiv 0,5 \leq a \leq 1,0 \equiv A_1$$

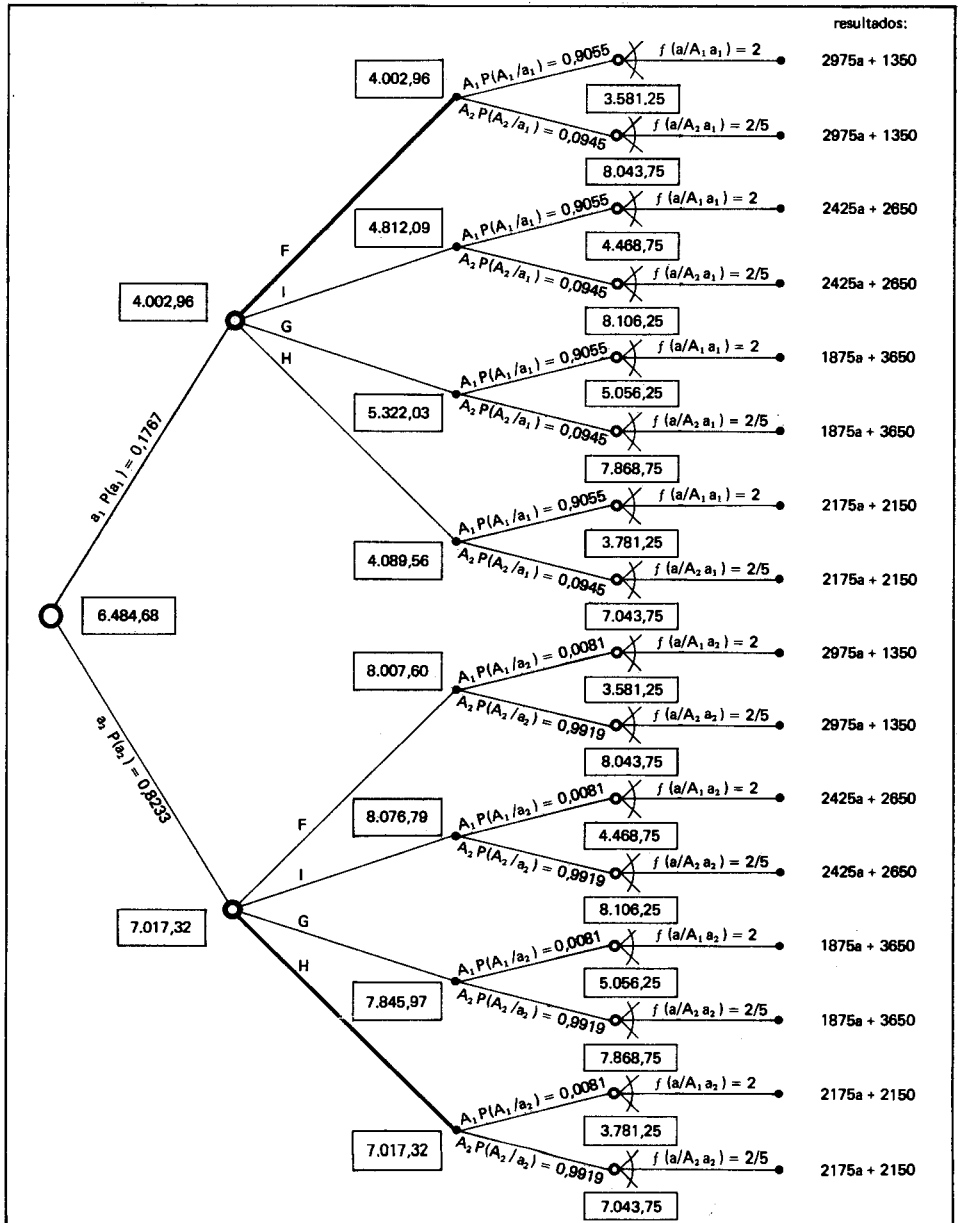
e $0,5 \leq a \leq 3,5$

$$f(a/A_1 a_1) = \frac{P(a_1/A_1) \cdot P(A_1/a) \cdot f(a)}{P(a_1/A_1) \cdot P(A_1)} = \frac{f(a) \cdot P(A_1/a)}{P(A_1)} = f(a/A_1)$$

e portanto as informações acerca dos a_i , não influem na determinação da distribuição "a posteriori" de "a", como era de se esperar.

Construindo novamente a árvore, com os cálculos já feitos e as decisões tomadas, teremos:

Figura 12



A regra de decisão do empresário será: "selecionar F se a_1 e H se a_2 ". Observamos que, para qualquer uma das duas respostas do consultor, H é sempre preferível a I e G (ver figura 12).

A esperança do custo com informação imperfeita (I), será:

$$\langle C/I \rangle = \text{Cr\$ } 6484,68$$

O valor de informação imperfeita será:

$$\langle C \rangle - \langle C/I \rangle = 6500 - 6484,68 = 15,32$$

Observamos finalmente que, mesmo sendo um excelente consultor (erra pouco), seus serviços valem apenas Cr\$ 15,32 comparados com o valor da clarividência parcial \rightarrow Cr\$26,66 e com o da informação perfeita Cr\$ 33,33.

INTRODUÇÃO, NO MODELO, DE CURVAS DE UTILIDADE NÃO LINEARES.

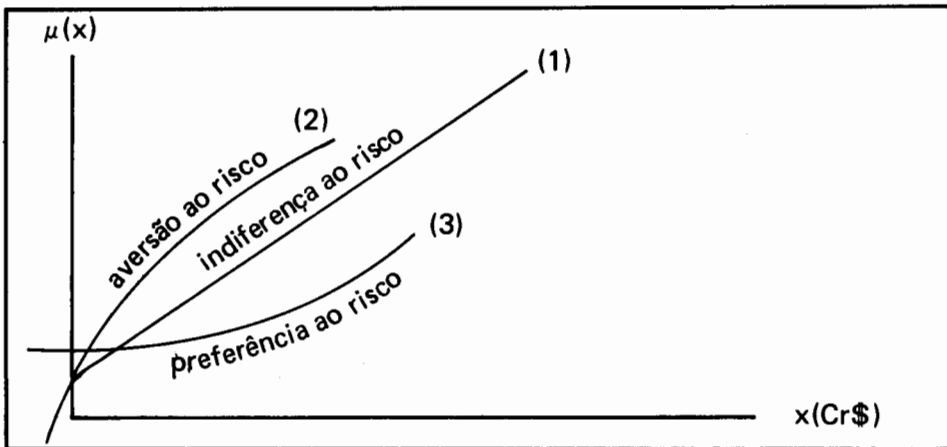
Resolução do Exemplo com Incerteza e Com Curva de Utilidade Exponencial.

Até agora, tratamos do problema de localização industrial com incerteza em uma das tarifas, considerando utilidade linear. No entanto, isto não ocorre na maioria dos casos, isto é, o empresário face a uma decisão não-repetitiva, que envolve grandes somas monetárias e que está sendo tomada sob condições de incerteza, é **avesso ao risco**. A maioria das pessoas se comporta desta forma.

Na Fig. 13, exemplificamos três curvas de utilidade: a de um indivíduo indiferente ao risco (1), a de um avesso ao risco (2) e a de um com preferência ao risco (3).

85

Figura 13

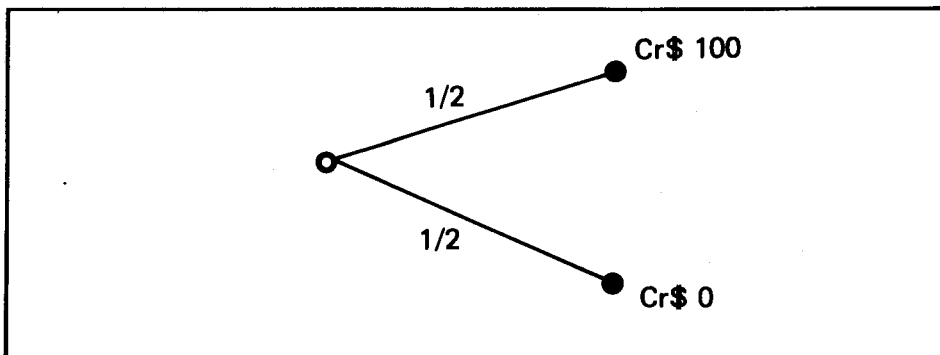


Associado ao conceito de utilidade, existe o de **equivalente certo de uma loteria**, definido como sendo "o valor tal que se fica indiferente

entre possuir a loteria e este valor".

Exemplificando, suponhamos a loteria da Fig. 14.

Figura 14

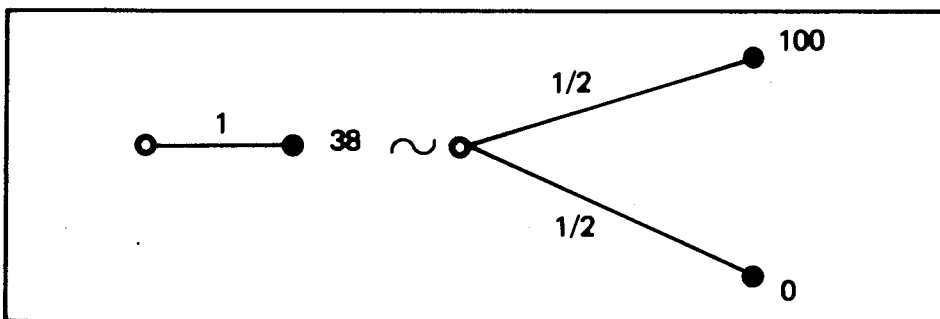


86

Agora, perguntamos ao tomador de decisões, por quanto ele estaria disposto a vender a loteria da Fig. 14 para se ver livre da incerteza. Diga-

mos que ele a venda por **Cr\$ 38**. Então **Cr\$ 38** na certeza é indiferente a $[\text{Cr\$ } 100 (1/2) + \text{Cr\$ } 0 (1/2)]$ ou seja:

Figura 15



Na situação acima, dizemos que **38** é o **equivalente certo** da loteria da fig. 14, para o particular tomador de decisões considerado.

Chamaremos de \tilde{x} o equivalente certo de uma loteria qualquer.

Notemos que para a loteria da fig. 14, $\langle x \rangle = 50$ e temos $\tilde{x} < \langle x \rangle$ e isto sempre ocorre quando o tomador de decisões é um indivíduo avesso ao risco. Temos ainda:

$\tilde{x} = \langle x \rangle$ na situação de indiferença ao risco

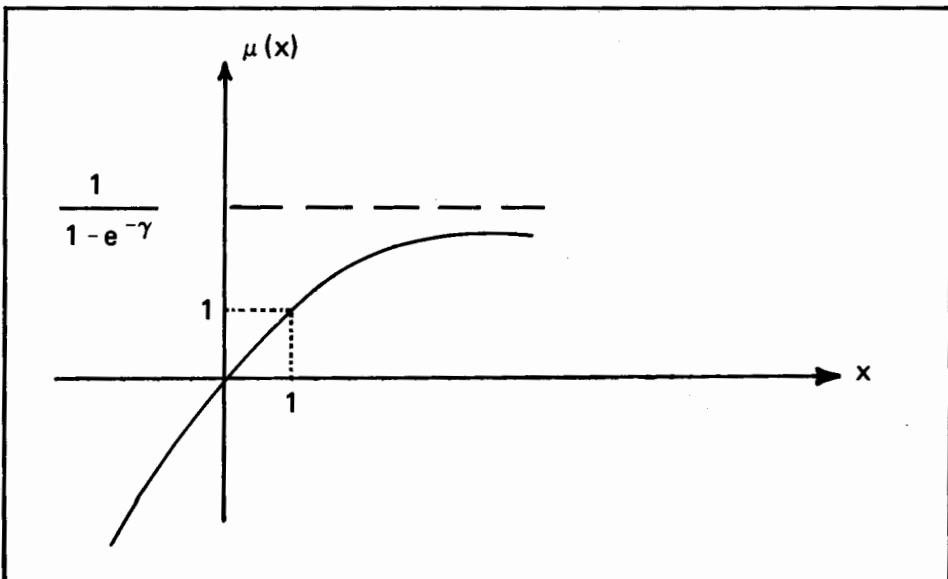
$\tilde{x} > \langle x \rangle$ na situação de preferência ao risco

Para continuarmos o exemplo de localização de fábrica, selecionamos a curva de utilidade exponencial, que caracteriza um indivíduo avesso ao risco, e que tem a seguinte formulação:

$$u(x) = \frac{1 - e^{-\gamma x}}{1 - e^{-\gamma}}, \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma > 0$$

87

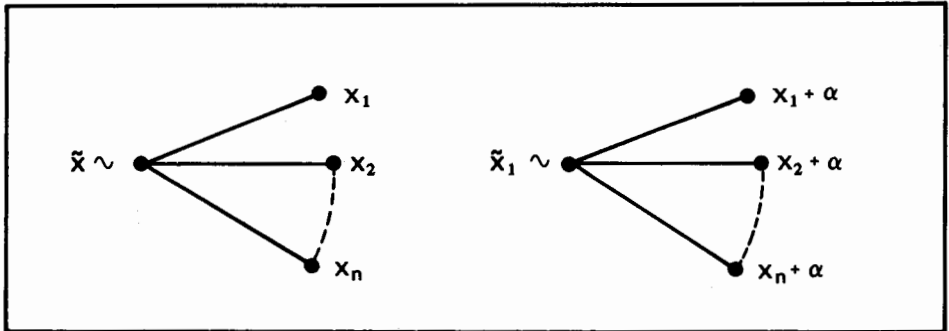
Figura 16



A curva de utilidade exponencial (ver fig. 16) é uma das mais conhecidas, além de possuir uma proprie-

dade que apenas a curva de utilidade linear, além dela, possui. Suponhamos as duas loterias:

Figura 17



Na situação acima, sendo exponencial a curva de utilidade (ou linear), vale a propriedade:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x} + \alpha \quad (P)$$

88

Vamos adotar $\gamma = \frac{1}{5000}$ e resolver o problema de localização, supondo inicialmente que decidimos e depois ficamos conhecendo a tarifa "a". A árvore de decisão é semelhante à da fig. 7, excetuando-se os valores terminais que não serão custos mas a utilidade dos mesmos. Temos:

$$C_X(a) = K_X + R_X a.$$

Como estamos tratando com custos, tais valores entram com sinal negativo na função de utilidade:

$$\begin{aligned} u[-C_X(a)] &= u(-K_X - R_X a) = \frac{1 - e^{-\gamma(-K_X - R_X a)}}{1 - e^{-\gamma}} = \\ &= \frac{1 - e^{\gamma(K_X + R_X a)}}{1 - e^{-\gamma}} = 5000,5 [1 - e^{\gamma(K_X + R_X a)}] \end{aligned}$$

Essa função de utilidade representa uma loteria de perda e, se traçarmos o gráfico $u_x(K_x + R_x a)$, obteremos uma curva simétrica à apresentada na Fig. 16, com relação ao eixo das ordenadas.

A utilidade do equivalente certo de uma alternativa qualquer, será dada por:

$$U(\tilde{x}_i) = \langle U[-C_x(a)] \rangle = \int_{0,5}^{3,5} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma(K_x + R_x a)}}{1 - e^{-\gamma}} da =$$

$$= \frac{1}{3(1 - e^{-\gamma})} \left[3 - \frac{e^{-\gamma(K_x + 0,5 \cdot R_x)} (e^{3\gamma R_x} - 1)}{\gamma R_x} \right]$$

Temos, então, para cada alternativa de localização (X), os seguintes resultados:

Tabela 4

X	$u(\tilde{x}_i) = \langle u[-C_x(a)] \rangle$
A	-27443,48
B	-36512,21
C	-76331,76
D	-41605,12
E	-24682,78
F	-19506,01
G	-18143,27
H	-14677,77
I	-19439,96

Se colocarmos estes valores na árvore de decisão da fig. 7, evidentemente a melhor alternativa será H

pois a utilidade de seu equivalente certo $\rightarrow \tilde{x}_H$, é a maior (-14677,77).

89

Embora a melhor decisão continue sendo H, a segunda melhor decisão passou a ser G, ao passo que F ficou em 4º plano. No caso de utilidade linear, F era a 2ª melhor decisão e G a 3ª. Como agora a curva de utilidade corresponde à aversão ao risco, a 2ª melhor alternativa deslocou-se de F para G pois F é uma "loteria mais arriscada" do que G. A alternativa I que estava classificada em 4º lugar passou agora para o 3º lugar.

A classificação de todas as alternativas, tanto para o caso de curva de utilidade linear como para o caso de curva de utilidade exponencial, para a situação da fig. 7, é dada na tabela 5.

Tabela 5

X	Utilidade Linear	Utilidade Exponencial
H	1	1
F	2	4
G	3	2
I	4	3
E	5	5
A	6	6
D	7	8
B	8	7
C	9	9

O equivalente certo da loteria (da melhor alternativa), será dado por:

$$90 \quad U(\bar{x}) = -14677,77 = \frac{1 - e^{-\gamma \bar{x}}}{1 - e^{-\gamma}} \Rightarrow \boxed{x = -6849,89}$$

Lembrando que $\langle x \rangle = -6500$, temos que $\bar{x} < \langle x \rangle$ que, como afirmamos anteriormente, é um resultado geral para indivíduos avessos ao risco.

Passamos agora a estudar a situação em que podemos obter clarividência com relação a "a". Para isto, devemos estudar a sensibilidade da localização ótima face a variações em "a". Temos:

$$u[-C_X(a)] = 5000,5 \cdot [1 - e^{\gamma(K_X + R_X A)}]$$

Para que $u[-C_{X'}(a)] > u[-C_{X''}(a)]$, fixado o valor de "a", é necessário e suficiente que $K_{X'} \cup R_{X'} a < K_{X''} + R_{X''} a$, isto é, a utilidades maiores corresponderão custos menores. De acordo com esse raciocínio a fig. 9 nos fornece o resultado desejado e, portanto, apenas F e H poderão ser LOT, quando "a" varia entre 0,5 e 3,5. Assim, a árvore de decisão é semelhante à da fig. 10, excetuando os valores terminais, que serão:

$$\text{em F: } 5000,5 \cdot [1 - e^{-\gamma (K_f + R_{fa})}]$$

$$\text{em H: } 5000,5 \cdot [1 - e^{-\gamma (K_h + R_{ha})}]$$

A expectância da utilidade, com clarividência em relação a "a", será:

$$\begin{aligned} \langle u [-C_X(a)] / Cl_a \rangle &= \int_{0,5}^{1,0} 1/3 \times 5000,5 \cdot [1 - e^{-\gamma (K_f + R_{fa})}] da + \\ &+ \int_{1,0}^{3,5} 1/3 \times 5000,5 \cdot [1 - e^{-\gamma (K_h + R_{ha})}] da = -14595,43 \end{aligned}$$

91

O equivalente certo, com clarividência, é obtido através de:

$$u(\tilde{x}_{cla}) = \langle u [-C_X(a)] / Cl_a \rangle = -14595,43 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14595,43 = \frac{1 - e^{-\gamma \tilde{x}_{cla}}}{1 - e^{-\gamma}} \Rightarrow \boxed{\tilde{x}_{cla} = -6829,18}$$

Se o claridente cobrar K cruzeiros pelos seus serviços então, aplicando a propriedade (P), temos que o equivalente certo com informação perfeita em relação a "a" ao custo K, é dado por:

$$\boxed{\tilde{x}_{cla,k} = \tilde{x}_{cla} - k = -6829,18 - k}$$

O maior valor de k , será obtido assim:

$$\tilde{x}_{\text{cla}, k} = \tilde{x} \Rightarrow -6829,18 - k = 6849,89 \Rightarrow k = \text{Cr\$ } 20,71$$

que é o valor da informação perfeita.

Lembramos que no caso de utilidade linear, k valia Cr\$ 33,33.

No caso de clarividência parcial, temos que a utilidade do equivalente certo, $u(\tilde{x}_{\text{cla}, p})$, vale:

$$u(\tilde{x}_{\text{cla}, p}) = p(-14595,43) + (1-p) \cdot (-14677,77)$$

Se $p = 0,8$ temos:

$u(\tilde{x}_{\text{cla}, p}) = -14611,89$ e $\tilde{x}_{\text{cla}, p}$ é obtido através de:

92

$$-14611,89 = \frac{1 - e^{-\gamma \tilde{x}_{\text{cla}, p}}}{1 - e^{-\gamma}} \quad \tilde{x}_{\text{cla}, p} = \text{Cr\$ } -6833,01$$

O valor da informação com clarividência parcial, k' , passa a ser:

$$k' = 6849,89 - 6833,01 = 16,88$$

No caso de utilidade linear, k' valia Cr\$ 26,66.

Devemos, finalmente, analisar o caso de informação imperfeita, e para isso construímos uma árvore de decisão semelhante àquelas das figuras 11 e 12, apresentada a seguir:

Figura 18

